Trigonométrie

1 Cosinus et sinus

Pour la définition du cercle unité et des fonctions cosinus et sinus, on renvoie au poly de cours sur les complexes.

Valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

On remarque que les valeurs correspondent à $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$ avec $n \in [\![0,4]\!]$. Elles sont décroissantes pour cos et croissantes pour sin.
Les formules suivantes sont faciles à retrouver sur un dessin en regardant par exemple $x = \dfrac{\pi}{6}$:

Formulaire

$$\begin{aligned}
\cos(x+2\pi) &= \cos x & \cos(-x) &= \cos x & &(\cos \text{ est paire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\sin(x+2\pi) &= \sin x & \sin(-x) &= -\sin x & &(\sin \text{ est impaire, } 2\pi\text{-périodique})\\
\cos(x+\pi) &= -\cos x & \cos(\pi-x) &= -\cos x\\
\sin(x+\pi) &= -\sin x & \sin(\pi-x) &= \sin x\\
\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x
\end{aligned}$$

On notera que dans les formules avec du $\dfrac{\pi}{2}$, on passe de cos à sin et vice versa. Ce n'est pas le cas pour les formules avec π.

Proposition (Formules d'addition)

Pour tous réels a, b

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{aligned}$$

Pour les retenir, on se souviendra que cos *change le signe*, mais pas sin. En revanche, sin *mélange* les cos et les sin, tandis que cos non. Enfin, pour $\cos(a+\dots)$, le premier terme est toujours $\cos a \dots$ et idem pour $\sin(a+\dots)$.
Noter que les deux formules avec $a-b$ se déduisent aisément des autres en remplaçant b par $-b$.

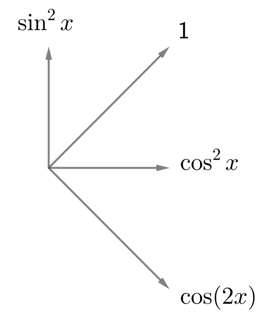
Proposition (Formules de duplication)

Pour tout réel x,

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$\sin(2x) = 2\cos x \sin x$$

La formule $\sin(2x)$ n'est pas dure à apprendre. Pour les trois autres, on peut se rappeler le dessin très pratique suivant :



On retrouve aussi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, utile pour s'assurer qu'on a placé les bonnes fonctions aux bonnes flèches.

Noter que les flèches peuvent aussi se prendre “à l'envers” : par exemple $1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$.

Proposition (Formules de linéarisation)

Pour tous réels a, b,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

On les retrouve facilement à partir des formules d'addition.

2 Tangente et cotangente

Définition (Tangente)

La tangente d'un réel x est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Cette fonction n'est donc pas définie en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Avec cette définition, on retrouve facilement des valeurs particulières de tangente :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

On remarque que, de $\dfrac{\pi}{6}$ à $\dfrac{\pi}{3}$, on multiplie à chaque fois par $\sqrt{3}$.

Avec la définition, on peut en déduire des formules sur $\tan(x+\pi)$, $\tan(\pi-x)$, ... Les plus importantes sont

$$\tan(x+\pi)=\tan x \qquad \tan(-x)=-\tan x \qquad (\tan \text{ est impaire, } \pi\text{-périodique})$$

Dans un triangle *rectangle*, si x est un angle qui n'est pas l'angle droit,

$$\cos x=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}} \qquad \sin x=\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{H}} \qquad \tan x=\frac{\mathrm{O}}{\mathrm{A}} \qquad \text{(relation CAH-SOH-TOA)}$$

avec H la longueur de l'hypoténuse, O celle du côté opposé à l'angle x, et A celle du côté adjacent (qui n'est pas l'hypoténuse).

Proposition (Formules d'addition, tangente)

Pour tous réels a, b, lorsque ces expressions ont un sens :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

Par exemple, la première formule n'est valide que si $a, b, a+b \notin \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

On les retrouve par les formules d'addition de cos et sin. Quand $a=b$, on obtient une formule de duplication de $\tan(2a)$.

Proposition (Formules de l'angle moitié)

Pour tout réel $x\not\equiv\pi[2\pi]$, en posant $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}$$

Comme $\cos x$ et $\sin x$ sont toujours définis, il est naturel que $1+t^2$, qui ne s'annule jamais, soit au dénominateur. La dernière se déduit du quotient des deux premières, ou de la formule de $\tan(2a)$ avec $a=\frac{x}{2}$.

Définition (Cotangente)

La cotangente d'un réel x est définie par $\operatorname{cotan} x=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$. Elle n'est donc pas définie en $x=k\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$.

Égalités de cosinus, sinus, tangentes. Soit $a, b\in\mathbb{R}$

$$\cos a=\cos b \iff (a\equiv b\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad a\equiv -b\,[2\pi])$$

$$\sin a=\sin b \iff (a\equiv b\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad a\equiv \pi-b\,[2\pi])$$

et si $a, b\not\equiv\frac{\pi}{2}\,[\pi]$

$$\tan a=\tan b \iff a\equiv b\,[\pi]$$

3 Liens avec les complexes

Tout ce qui suit découle des formules fondamentales suivantes :

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$\boxed{e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$$

Proposition (Formules d'Euler)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ces formules servent notamment à linéariser $\cos^k x$ et $\sin^k x$ pour $k \in \mathbb{N}$. Avec $k = 2$ on retrouve (entre autres)

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$

Proposition (Formule de Moivre)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} \qquad \text{i.e.} \qquad (\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Proposition (Les colleurs l'adorent !)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right), \qquad \sin x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$$

Cette formule est plus utile qu'il n'y parait. Couplée à la formule de Moivre, elle permet de prouver / retrouver

$$\sin(2x) = \operatorname{Im}(e^{2ix}) \overset{\text{Moivre}}{=} \operatorname{Im}(e^{ix} e^{ix}) = 2 \cos x \sin x$$

Par la même méthode on peut exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$ et de leurs puissances. Par exemple

$$\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{ix} e^{ix} e^{ix}) = \cdots = 4\cos^3 x - 3\cos x$$