ARITHMÉTIQUE

Exercice supplémentaire (rédaction pour l'étape 4 des équations diophantiennes)

Un exemple de rédaction de l'étape 4 avec $7x+12y=5$ (vu en TD) : on a vu la rédaction jusqu'à la détermination d'une solution particulière $(x_0,y_0)=(-25,15)$. On peut « parachuter » le $\mathcal{S}$ mais s'il faut le justifier : on a

$$\begin{cases} 7x+12y=5 \\ 7(-25)+12(15)=5 \end{cases}$$

Ainsi, (en soustrayant la première ligne à la seconde)

$$7(x+25)+12(y-15)=0$$

On en déduit que

$$7(x+25)=-12(y-15)$$

D'où $7 \mid -12(y-15)$. Comme $7\wedge(-12)=1$, par le lemme de Gauss, $7 \mid y-15$. Ainsi, il existe $k\in\mathbb{Z}$, on a $\boxed{y=15+7k}$. Ainsi,

$$7(x+25)=-12(7k)$$

Donc $x+25=-12k$, ou encore $\boxed{x=-25-12k}$. On obtient alors

$$\boxed{\mathcal{S}=\{(-25-12k,15+7k) \mid k\in\mathbb{Z}\}}$$

A vous de jouer : résoudre $8x+6y=28$. Faites toutes les étapes ! La solution est à la toute fin du document.

Exercice 10

On suppose $(a+b)\wedge(ab)=1$. On pose $d:=a\wedge b$. Alors $d \mid a$ et $d \mid b$ donc $d \mid (a+b)$. De plus, $d \mid ab$ si bien que $d \mid (a+b)\wedge(ab)$, donc $d \mid 1$. Comme $d\geq 0$, on a $d=1$.

Réciproquement, on suppose $a\wedge b=1$. Supposons par l'absurde que

$$D:=(a+b)\wedge(ab)>1$$

Alors D possède un diviseur premier p. Comme $D \mid ab$, on a aussi $p \mid ab$. Par le lemme d'Euclide, on a $p \mid a$ ou $p \mid b$. Supposons par exemple que $p \mid a$. Comme on a également $p \mid a+b$, on en déduit que $p \mid (a+b-a)$ donc $p \mid b$. Ainsi, $p \mid a\wedge b$, donc $p \mid 1$. Contradiction.

Exercice 13

Il faut montrer que $24 \mid p^2-1$. Si on prouve que $3 \mid p^2-1$ et $8 \mid p^2-1$, comme $3\wedge 8=1$, on aura $24 \mid p^2-1$.
Montrons que $8 \mid p^2-1$. Or, $p\geq 5$ donc p est impair. On pose $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=2k+1$, si bien que

$$p^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1=4k(k+1)$$

Or, parmi k et $k+1$, l'un d'eux est pair, donc $2 \mid k(k+1)$. Ainsi, $8 \mid 4k(k+1)$, c'est-à-dire $8 \mid p^2-1$.

Montrons que $3 \mid p^2-1$. Parmi les 3 entiers consécutifs $p-1,p,p+1$, l'un d'entre eux est forcément un multiple de 3. Or, on sait que $p\geq 5$ est premier, donc $3 \nmid p$. Ainsi, $3 \mid p-1$ ou $3 \mid p+1$. Par suite, $3 \mid (p+1)(p-1)$ donc $3 \mid p^2-1$. D'où le résultat.

Exercice 18

$6 \equiv -1 \quad [7]$ donc $6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \quad [7]$. Si $n \in 2\mathbb{N}$, on a donc $6^n - 1 \equiv 0 \quad [7]$. Si $n \in 2\mathbb{N}+1$, on a donc $6^n - 1 \equiv -2 \equiv 5 \quad [7]$.

Il s'agit de montrer que $5n^3 + n \equiv 0 \quad [6]$. On pose r le reste de la division euclidienne de n par 6. On a donc $r \in [\![0,5]\!]$. Alors, $n \equiv r \quad [6]$ et par suite $n^3 \equiv r^3 \quad [6]$. D'où

$$5n^3 + n \equiv 5r^3 + r \quad [6]$$

Il suffit donc de vérifier que $5r^3 + r \equiv 0 \quad [6]$ pour tout $r \in [\![0,5]\!]$. On traite tous les cas. On peut pour cela faire un tableau « modulo 6 » :

r	$r^3 \bmod 6$	$5r^3 + r \bmod 6$
0	0	0
1	1	0
2	2	0
3	3	0
4	4	0
5	5	0

Par exemple, si $r = 5$, alors $r \equiv -1 \quad [6]$ donc $r^3 \equiv -1 \quad [6]$, si bien que $5r^3 \equiv -5 \quad [6]$. Ainsi, $5r^3 + r \equiv -5 + 5 \equiv 0 \quad [6]$.

Corrigé de l'équation diophantienne bonus

Comme $8 \wedge 4 = 2$ et que $2 \mid 28$, $\mathcal{S} \neq \varnothing$. On résoud maintenant :

$$4x + 3y = 14$$

(on cherche maintenant une solution particulière : on peut passer par Bézout, mais ici c'est très simple :) On a $(2,2) \in \mathcal{S}$. Ainsi,

$$\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 4 \times 2 + 3 \times 2 = 14 \end{cases}$$

On obtient alors

$$4(x-2) + 3(y-2) = 0$$

Ainsi,

$$4(x-2) = -3(y-2)$$

on en déduit que $4 \mid -3(y-2)$. Or, $4 \wedge (-3) = 1$, par le lemme de Gauss, $4 \mid y-2$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{y = 2+4k}$. On en déduit que

$$4(x-2) = -3 \times (2+4k-2) = -3 \times 4k$$

Ainsi, $x - 2 = -3k$, ou encore $\boxed{x = 2-3k}$. Finalement

$$\mathcal{S} = \{(2-3k, 2+4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$