Exercice 1

2) *Version "avec les mains"* : pour calculer cette limite, on a envie de "changer de variable" en posant $y = \frac{1}{x}$: on remarque que $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$, et donc on a envie d'écrire

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y}$$

et on sait que cette dernière limite vaut 1 par l'exercice 2, question 1.

Ce changement de variable est permis, mais pour le justifier il faut passer par une composition de limite.

Version rigoureuse : d'une part,

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$$

et d'autre part, comme sin est dérivable en 0,

$$\frac{\sin y - \sin 0}{y - 0} = \frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y \to 0^+]{} \sin'(0) = \cos 0 = 1$$

Donc par composition,

$$\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Exercice 13

On note n le degré de P, et on pose $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Alors, il existe un polynôme Q de degré au plus $2p$ tel que

$$P(x) = ax^{2p+1} + Q(x)$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$ *($a \neq 0$ sinon P n'est pas de degré n).* Montrons que P admet une racine réelle. Montrons-le pour $a > 0$, le cas $a < 0$ étant similaire.
Pour tout $x \neq 0$,

$$P(x) = x^{2p+1} \left(a + \frac{Q(x)}{x^{2p+1}} \right)$$

Or, $x^{2p+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, et comme Q est de degré $2p < 2p + 1$, on a $\frac{Q(x)}{x^{2p+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Alors, par somme et produit de limites, comme $a > 0$,

$$P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

En particulier, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $P(d) \geq 0$. Par ailleurs, $x^{2p+1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$, donc on montre de même que $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. Ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}$ tels que $P(c) \leq 0$.
Enfin la fonction P est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, comme $P(c) \leq 0 \leq P(d)$, il existe $x \in \mathbb{R}$ compris entre c et d tel que $P(x) = 0$. Ainsi, P admet au moins une racine réelle.

Exercice 18

L'idée est d'utiliser le théorème des bornes atteintes. Mais pour cela il faut se placer sur un segment. L'idée est d'utiliser le fait que f est coercive pour dire qu'elle n'atteint pas son minimum en dehors d'un segment qu'on doit déterminer.
On pose $A := f(0) \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \leq B \qquad f(x) \geq A + 1$$

De même, comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq C \qquad f(x) \geq A + 1$$

Comme $A = f(0)$, ce qui précède entraine nécessairement $0 \in [B, C]$. La fonction $f|_{[B,C]}$ est définie sur le segment $[B, C]$ donc est bornée et atteint son minimum en un point $x_0 \in [B, C]$. Ainsi,

$$\forall x \in [B, C] \qquad f(x) \geq f(x_0)$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) \geq f(x_0)$. Si $x \in [B, C]$, cela découle de l'inégalité ci-dessus. Si $x \notin [B, C]$, alors

$$f(x) \geq A + 1 \geq A = f(0) \geq f(x_0) \qquad \text{car } 0 \in [B, C]$$

D'où le résultat.

Exercice 27

On a vu qu'appliquer l'IAF à $f : y \mapsto ye^{\frac{1}{y}}$ sur l'intervalle $[x, x+1]$ ne permettait pas de déduire la limite. Au mieux, on démontre que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq B \qquad \left|(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right| \leq 1 + \varepsilon$$

ce qui ne suffit pas pour montrer une limite.

L'idée est donc de modifer l'écriture de cette expression et d'appliquer l'IAF à une autre fonction. Pour tout $x > 0$,

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x+1}} + x\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$$

Par composition, $e^{\frac{1}{x+1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ donc il faut déterminer la limite de $x\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$. Appliquons l'IAF à $g : y \mapsto e^{\frac{1}{y}}$ sur $[x, x+1]$. Comme $x > 0$, il est clair que g est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. De plus, pour tout $y \in [x, x+1]$,

$$|g'(y)| = \left|-\frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{y}}\right| = \frac{1}{y^2}e^{\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis (appliqué à g sur $[x, x+1]$),

$$|g(x+1) - g(x)| \leq \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,|x+1-x| = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

Ainsi,

$$\left|x\left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)\right| \leq \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Finalement, par somme,

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 + 0 = 1$$