Exercice 27

2) On pose $f : x \mapsto x^2$.

- Clairement $D_f = \mathbb{R}$. On montrerait facilement que le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Cherchons les points fixes de f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \ell^2 = \ell \\ &\iff \ell(\ell - 1) = 0 \\ &\iff \ell \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

On place le point 1 *sur le tableau de variations de* f *:*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On distingue plusieurs cas selon la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

1. Si $u_0 = 0$ ou $u_0 = 1$, alors u_0 est un point fixe de f. Par récurrence immédiate,

$$u_n = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(u_0) = u_0$$

   donc $u_n \to u_0$.

2. Si $0 < u_0 < 1$, alors on remarque que $J = [0, 1]$ vérifie

$$u_0 \in J \qquad \text{et} \qquad f(J) = J \subset J$$

   si bien que la suite (u_n) est bien définie et pour tout n, $u_n \in J$. De plus, f est croissante sur J.

   - De plus, $u_1 = u_0^2 \leq u_0$ car $u_0 \leq 1$. Ainsi, par récurrence immédiate, comme f est croissante, on a $u_{n+1} \leq u_n$, donc (u_n) est décroissante.
   - Comme (u_n) est minorée par 0, on en déduit qu'elle converge vers $\ell \in J$. De plus sa limite est un point fixe de f, donc $\ell \in \{0, 1\}$. Or, comme (u_n) est décroissante, on a $\ell \leq u_n$, donc $\ell \leq u_0$. Ainsi, $\ell < 1$, donc $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \to 0$.

3. Si $u_0 > 1$, alors on remarque que $J = [1, +\infty[$ vérifie

$$u_0 \in J \qquad \text{et} \qquad f(J) = J \subset J$$

   si bien que la suite (u_n) est bien définie et pour tout n, $u_n \in J$. De plus, f est croissante sur J.

   - De plus, $u_1 = u_0^2 \geq u_0$ car $u_0 \geq 1$. Ainsi, par récurrence immédiate, comme f est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n$, donc (u_n) est croissante.
   - Supposons par l'absurde que (u_n) est majorée, alors comme elle est croissante, (u_n) converge, et sa limite est nécessairement un point fixe de f, à savoir $\ell \in \{0, 1\}$. Or, $u_0 \leq u_n$ donc en passant à la limite, $u_0 \leq \ell$. Cependant, $\ell < u_0$, donc $\ell < \ell$. Contradiction. Ainsi, (u_n) est non majorée. Comme (u_n) est croissante, on en déduit que $u_n \to +\infty$.

3) On pose $f : x \mapsto x + \arctan x$.

- Comme arctan est définie sur $\mathbb{R}$, on a $D_f = \mathbb{R}$. De plus, f est la somme de deux fonctions croissantes donc est croissante. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Cherchons les points fixes de f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \ell + \arctan \ell = \ell \\ &\iff \arctan \ell = 0 \end{aligned}$$

En appliquant tan à cette égalité, cela entraine $\ell = 0$. Réciproquement, $\ell = 0$ est clairement solution de $\arctan \ell = 0$. Ainsi, $f(\ell) = \ell \iff \ell = 0$. *On le rajoute dans le tableau :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- On remarque ensuite que $J = [0, +\infty[$ vérifie

$$u_0 = 1 \in J \qquad \text{et} \qquad f(J) = J \subset J$$

si bien que la suite (u_n) est bien définie et pour tout n, $u_n \in J$. De plus, f est croissante sur J.

- On calcule
$$u_1 = u_0 + \arctan u_0 = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{4} \geq u_0$$
Ainsi, par récurrence immédiate et comme f est croissante sur J, $u_{n+1} \geq u_n$, donc (u_n) est croissante.

- Montrons que $u_n \to +\infty$. Supposons par l'absurde que (u_n) soit majorée. Alors comme (u_n) est croissante, elle converge. De plus sa limite serait un point fixe de f, donc nécessairement 0. Or, en passant à la limite dans $1 = u_0 \leq u_n$, on obtient $1 \leq 0$. Contradiction. Donc (u_n) est non majorée. Comme (u_n) est croissante, elle tend vers $+\infty$.

4) On pose $f : x \mapsto e^x - 1$.

- Comme exp est définie sur $\mathbb{R}$, on a $D_f = \mathbb{R}$. De plus, f est la somme de deux fonctions croissantes donc est croissante. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Cherchons les points fixes de f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff e^\ell - 1 = \ell \\ &\iff e^\ell - \ell - 1 = 0 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, on étudie $g : x \mapsto e^x - x - 1$ et on cherche où g s'annule. Tout d'abord, $D_g = \mathbb{R}$, et g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = e^x - 1$, donc

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0 \qquad \text{car exp et ln sont croissantes} \end{aligned}$$

Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui entraine que $g(\ell) = 0 \iff \ell = 0$. Finalement $\ell = 0$ est l'unique point fixe de f. *On le rajoute dans le tableau de variations de f :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- On remarque ensuite que $J =]-\infty, 0]$ vérifie

$$u_0 = -1 \in J \qquad \text{et} \qquad f(J) = J \subset J$$

  si bien que la suite (u_n) est bien définie et pour tout n, $u_n \in J$. De plus, f est croissante sur J.

- On calcule $u_1 = e^{u_0} - 1 = e^{-1} - 1 \geq u_0$. Ainsi, par récurrence immédiate et comme f est croissante sur J, on a $u_1 \geq u_0$, donc (u_n) est croissante.

- (u_n) est croissante et majorée par 0. Ainsi, (u_n) converge, et sa limite est nécessairement un point fixe de f (qui appartient à J), donc 0. Finalement, $u_n \to 0$.