Exercice 2

6)

$$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Une primitive sur $I = \mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

7)

$$\frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

Une primitive sur $I = \mathbb{R}_+^*$ est donc

$$x \mapsto -\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}}$$

8)

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

Une primitive sur $I =]1, +\infty[$ (ou $]-\infty, 1[$) est donc

$$2x + 5\ln|x-1|$$

9)

$$\frac{\ln x}{x}$$

(est sous la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln x$). Une primitive est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

10)

$$\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

(est sous la forme $u'u$ avec $u(x) = \tan x$). Une primitive sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}(\tan x)^2$$

\definecolor{green}{rgb}{0,0.7,0} % green more visible

11)

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$$

(est sous la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2+2$). Une primitive sur $I = \mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \sqrt{x^2+2}$$

12)

$$\frac{1}{x\ln x}$$

(est sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$). Une primitive sur $I =]0, 1[$ (ou $]1, +\infty[$) est donc

$$x \mapsto \ln(|\ln x|)$$

13)

$$x\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot (2x)\sqrt{1+x^2}$$

(est sous la forme $\frac{1}{2}u'\sqrt{u}$ avec $u(x)=1+x^2$). Une primitive sur $I=\mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

14)

$$\cos x \sin^3 x$$

(est sous la forme $u'u^3$ avec $u(x)=\sin x$). Une primitive sur $I=\mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{4}\sin^4 x$$

15)

$$\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

(est sous la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ avec $u(x)=e^x$). Une primitive sur $I=\mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto \arctan(e^x)$$

16)

$$\sin(2x)\cos^2 x = 2\sin x\cos^3 x$$

(est sous la forme $-2u'u^3$ avec $u(x)=\cos x$). Une primitive sur $I=\mathbb{R}$ est donc

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\cos^4 x$$

17)

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

(est sous la forme $-\frac{u'}{u^3}$ avec $u(x)=\cos x$). Une primitive sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}$$

Exercice 6

1)

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{x}{1-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int_2^5 \frac{-2x}{1-x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\ln\left|1-x^2\right|\right]_2^5 \\ &= -\frac{1}{2}\ln 24 + \frac{1}{2}\ln 3 \\ &= -\frac{1}{2}\ln 8\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2}} \qquad u = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad du = \frac{dx}{\sqrt{2}} \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\
&= [\arcsin u]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arcsin 0 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3) Fait en TD

4) Vu en cours

5) On exprime différemment sh^3 :

$$\begin{aligned}
\text{sh}^3 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \text{sh}^3 x dx &= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{3x}}{3} - 3e^x - 3e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{2^3}{3} - 3\times 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} - \left(\frac{1}{3} - 3 - 3 + \frac{1}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3} - 6 - \frac{3}{2} + \frac{1}{24} + 6 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{24}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{48 - 36 + 1}{24}\right) \\
&= \frac{13}{192}
\end{aligned}$$

6)

$$\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx \qquad t=\sqrt{x} \qquad dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad dx=2tdt$$

$$\begin{aligned}
&=\int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^3}2tdt\\
&=2\int_1^2 \frac{t^2-2t+1}{t^2}dt\\
&=2\int_1^2 1dt-4\int_1^2 \frac{1}{t}dt+2\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt\\
&=2-4\left[\ln|t|\right]_1^2+2\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2\\
&=2-4\ln 2-1+\frac{1}{2}\\
&=\frac{3}{2}-4\ln 2
\end{aligned}$$

7) La fonction $x \mapsto \sin^7 x$ est impaire, donc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx = 0$$

Et ouais.

8)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\cos(3x)dx &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x+3ix}dx\right)\\
&= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{-1+3i}e^{-x+3ix}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{-1+3i}e^{-\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{-1+3i}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-1-3i}{1+9}e^{-\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)-\mathrm{Re}\left(\frac{-1-3i}{1+9}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)+\mathrm{Re}\left(\frac{-3e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}\,ie^{3i\frac{\pi}{4}}\right)+\frac{1}{10}\\
&= \frac{-e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{-3e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)+\frac{1}{10}\\
&= \frac{-e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{-3e^{-\frac{\pi}{4}}}{10}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{10}\\
&= \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}}{5}+\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{ix}\sin x dx &= \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{ix+ix}dx\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{2ix}dx\right)\\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{2i}e^{2ix}\right]_0^{\pi}\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 7

1)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{sh} x dx \\
&= [\sin x \,\mathrm{ch} x]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x \,\mathrm{ch} x dx \\
&= 0 - [\cos x \,\mathrm{sh} x]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (-\sin x)\mathrm{sh} x dx \\
&= -\mathrm{sh}(2\pi) + 0 - \mathcal{I}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2\mathcal{I} = -\mathrm{sh}(2\pi) = \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{2}$$

si bien que

$$\mathcal{I} = \frac{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}{4}$$

2) En faisant de même, on trouve

$$\mathcal{I}(x) = [t\sin(\ln t)]_1^x - [t\cos(\ln t)]_1^x - \underbrace{\int_1^x \sin(\ln t)dt}_{\mathcal{I}(x)}$$

et donc

$$2\mathcal{I}(x) = (x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1)$$

càd

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1\right)$$

On cherche une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, par le théorème fondamental (et comme $1 \in \mathbb{R}_+^*$), $\mathcal{I}(x)$ est l'unique primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ qui s'annule en 1. Ainsi, une primitive possible est

$$t \mapsto \frac{1}{2}\left(t\sin(\ln t) - t\cos(\ln t) + 1\right)$$

Exercice 8

1) *Avec la convention* $\sin(0)^0 = 1$[1]

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

[1] *Dans le cas présent on peut se passer de cette précision, on le verra dans un chapitre ultérieur*

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \ \times \sin t \, dt \\
&= \left[-\sin^{n+1} t \, \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin^n t \, \cos^2 t \, dt \\
&= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, (1 - \sin^2 t) dt \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \, dt \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$$

ou encore

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

3) *En faisant un peu de travail au brouillon :*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} I_{n-4} = \dots$$

et on a une bonne idée de ce que ça va donner au final... Attention, si n est pair cela se termine par I_0. Si n est impair cela se termine par I_1.

Montrons par récurrence sur p que l'assertion

$$H_p : \qquad I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 1$, par la relation obtenue au 2), on a

$$I_2 = \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{2p-1}{2p} \times I_0$$

donc H_1 est vraie. Supposons maintenant que H_p soit vraie et montrons H_{p+1}. En réutilisant la relation encadrée, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0 \qquad \text{par } H_p
\end{aligned}$$

On en déduit que H_{p+1} est vraie.

Ainsi, H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times I_0$$

On montrerait de même que

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times I_1$$

Ainsi, de manière plus concise :

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \cdot \frac{\pi}{2}}$$