Exercice 5

Non rédigé : la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$.

Exercice 6

4) On pose $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. L'expression $f(x)$ a un sens si et seulement si $x + \sqrt{1+x^2} > 0$. *(Méthode classique :)* Cherchons les solutions $x \in \mathbb{R}$ de l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ \iff & \sqrt{1+x^2} > -x \end{aligned}$$

Si $x > 0$, c'est évident. On suppose donc $x \leq 0$. Alors

$$\begin{aligned} & x + \sqrt{1+x^2} > 0 \\ \iff & \sqrt{1+x^2} > |x| \\ \iff & \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \end{aligned}$$

Or cette dernière égalité est toujours vérifiée car $1 + x^2 > x^2$ et la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Finalement $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que $D_f = \mathbb{R}$.
(Autre méthode :) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ et donc $\sqrt{1+x^2} > -x$.

Étudions la dérivabilité de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u(x) = x + \sqrt{1+x^2}$. Donc $f = \ln \circ u$. D'une part, la fonction ln est dérivable. D'autre part, comme $1 + x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout réel x, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$u'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Ainsi, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' = (\ln \circ u)' = u' \times \ln' \circ u = \frac{u'}{u}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

5) Posons f la fonction de l'énoncé. Si $x \neq 0$ l'expression $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ a un sens, et de même si $x = 0$. Donc $D_f = \mathbb{R}$.
Vérifions la dérivabilité de f. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors, pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin \frac{1}{x} + x \times \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) \\ &= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Le même raisonnement et calcul s'applique pour $x \in \mathbb{R}_-^*$. Enfin, regardons la dérivabilité en 0. Soit $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

Or, $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0 *(pour l'instant, vous pouvez l'affirmer sans justification)*. Donc f n'est pas dérivable en 0.

6) *Non rédigé :* la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{3}x^{-4/3} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$.

Exercice 7

2) Appelons f cette fonction.

- *(Déterminer D_f)* $f(x)$ a un sens si et seulement si $|x| \neq 0$, donc $D_f = \mathbb{R}^*$.
- *(Parité et périodicité)* Ensuite, pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et

$$f(-x) = -x \ln|-x| = -f(x)$$

donc f est impaire. On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $D = \mathbb{R}_+^*$. On remarque alors que $f|_D(x) = x \ln x$. On définit donc $g : x \in D \mapsto x \ln x$ et on étudie g sur D.

- *(Limites aux bornes)* Par croissances comparées, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$. De plus, on a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- *(Dérivation)* La fonction g est dérivable sur D comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in D$,

$$g'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Alors,

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff \ln x + 1 > 0 \\ &\iff \ln x > -1 \\ &\iff x > e^{-1} \qquad \text{par stricte croissance de } \exp \text{ et de } \ln \end{aligned}$$

Et donc on obtient le tableau de variations suivant (on a le droit de faire plus beau sur la copie) :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

- *(Asymptotes)* Pas d'asymptote (on peut vérifier qu'il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$)
- *(Infos supplémentaires)* On remarquera que $g'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ donc on a une tangente verticale en $x = 0$. Et bien entendu on a une tangente horizontale en $x = e^{-1}$ par le tableau de variations.
- *(Tracé)* On trace C_g sur $D = \mathbb{R}_+^*$ puis on trace C_f sur $\mathbb{R}_-^*$ en faisant la symétrie de C_g par rapport à l'origine. Attention le point $x = 0$ reste valeur interdite.

Exercice 8 **4)** Tout d'abord, $(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)}$. Posons $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}\ln(1+x)$. Alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}$$

Or, $\frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par croissances comparées, tandis que $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ (car "$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$"). Ainsi, par somme de limites,

$$g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

et donc (par composition de limites)

$$e^{g(x)} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

6) En posant $y = \frac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} e^{-x^{-3}} \ln x &= \lim_{y \to +\infty} e^{-y} \ln\left(\frac{1}{y^3}\right) \\
&= \lim_{y \to +\infty} \left(e^{-y} \ln y\right) \\
&= -3 \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{e^y} = 0
\end{aligned}$$

par croissances comparées.

Exercice 9

2) On pose

$$\begin{aligned}
f :] -1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x - \ln(1+x)
\end{aligned}$$

Pour montrer le résultat, il suffit de prouver que f est positive. Tout d'abord, f est bien définie car si $x > -1$, alors $1 + x > 0$ et donc $f(x)$ a un sens. Ensuite, f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivable. Pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

et on remarque que

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\iff 1 > \frac{1}{1+x} \\
&\iff 1 + x > 1 \qquad\qquad \text{car } 1 + x > 0 \\
&\iff x > 0
\end{aligned}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(On n'a pas besoin de calculer les limites en -1 et $+\infty$ pour finir le raisonnement).
On voit ainsi que $f(x)$ est minimal en $x = 0$, et comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f \geq 0$. D'où le résultat.

Exercice 11 On pose $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$. Comme $D_f = \mathbb{R}_+$, on a également $D_g = \mathbb{R}_+$. Comme f est dérivable, g l'est aussi par produit de fonctions dérivables et pour tout $x \in D_g$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) \\
&= e^{-x} \left(f'(x) - f(x)\right)
\end{aligned}$$

Or, $f' - f \leq 0$ par hypothèse et $e^{-x} \geq 0$. Donc $g'(x) \leq 0$. On en déduit que g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi

$$g(x) \leq g(0) = e^{-0} f(0) = 1 \times 0 = 0$$

Ainsi, $g(x) \leq 0$. Or, $g(x) = e^{-x} f(x) \geq 0$ par hypothèse sur f. Ainsi, $g(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Donc $f(x) = 0 \times e^x = 0$ si bien que f est identiquement nulle.

Exercice 13 **1)** L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche donc les solutions $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x > 0$,

$$2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leq 0 \iff 2e^{2x} - 5e^x + 2 \leq 0$$

On pose alors $X = e^x > 0$. On cherche donc les solutions $X \in \mathbb{R}_+^*$ de $2X^2 - 5X + 2 \leq 0$. C'est un trinôme dont le discriminant est

$$\Delta = 25 - 4 \times 2 \times 2 = 9 > 0$$

donc il y a deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \in \mathbb{R}_+^* \qquad X_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi, il y a exactement deux solutions de $2X^2 - 5X + 2 \leq 0$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'inéquation de départ admet exactement deux solutions

$$x_1 = \ln X_1 = \ln 2 \qquad x_2 = \ln X_2 = -\ln 2$$

$$\mathcal{S} = \{-\ln 2, \ln 2\}$$

2) L'inéquation a un sens si et seulement si $3 - x > 0$ et $x + 1 > 0$, càd $x \in]-1, 3[$. Soit $x \in]-1, 3[$

$$\begin{aligned}
\ln(3-x) + \ln 2 - 2\ln(x+1) \geq 0 &\iff \ln\left(\frac{2(3-x)}{x+1}\right) \geq 0 \\
&\iff \frac{2(3-x)}{x+1} \geq 1 && \text{par croissance de exp et ln} \\
&\iff 6 - 2x \geq x + 1 && \text{car } x+1>0 \\
&\iff 5 \geq 3x \\
&\iff x \leq \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

si bien que

$$\mathcal{S} = \left]-1, \frac{5}{3}\right[$$

Exercice 14

L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}x = 3 &\iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 3 \\
&\iff e^x + \frac{1}{e^x} = 6 \\
&\iff e^{2x} - 6e^x + 1 = 0
\end{aligned}$$

On pose $X = e^x > 0$, de sorte que cela revient à chercher les solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ de $X^2 - 6X + 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = 36 - 4 = 32 > 0$$

donc il y a deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^* \qquad X_2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$$

si bien que l'équation de départ admet exactement deux solutions :

$$x_1 = \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \qquad x_2 = \ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

$$\mathcal{S} = \left\{\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right), \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right\}$$

Exercice 15 **1)** La fonction sh est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante car $\text{sh}' = \text{ch} > 0$. Par le théorème de la bijection, on en déduit que sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2) La fonction argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la réciproque de sh. Elle est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $\text{sh}'(\text{argsh}y) \neq 0$. Or $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule en aucun point, donc argsh est dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(y))}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, d'où

$$\text{ch}^2(x) = 1 + \text{sh}^2(x) > 0 \implies \text{ch}(x) = \sqrt{\text{ch}^2(x)} = \sqrt{1 + \text{sh}^2(x)}$$

car $\text{ch}(x) \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \text{argsh}'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{argsh}(y))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \end{aligned}$$

En particulier, argsh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\nearrow$

3) Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $\text{sh}x = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{sh}x = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\iff e^x - 2y - e^{-x} = 0 \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $X = e^x > 0$. Cela revient donc à chercher les solutions $X \in \mathbb{R}_+^*$ de $X^2 - 2yX - 1 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = 4y^2 + 4 > 0$$

donc les deux racines réelles sont

$$X_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} \in \mathbb{R}_+^* \qquad X_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \notin \mathbb{R}_+^*$$

Ainsi, seul X_1 est solution. On en déduit que $\text{sh}x = y$ admet une unique solution :

$$\text{sh}x = y \iff x = \ln X_1 = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

donc $\text{argsh}y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

On remarque que la dérivée de argsh est identique à la dérivée de la fonction de l'exercice 6 question 4). On renvoie donc à la correction de cette exercice. On retrouve bien, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{argsh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Exercice 16

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{x})^{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(e^{-x})^{k} \qquad \text{(par linéarité de la somme)}\end{aligned}$$

Si $x=0$, la somme vaut $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n=n$. Si $x \neq 0$, on a $e^{x} \neq -1 \neq e^{-x}$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx) = \frac{1-e^{(n+1)x}}{2(1-e^{x})} + \frac{1-e^{-(n+1)x}}{2(1-e^{-x})}$$

On pourrait aller plus loin en factorisant par "l'angle moitié" pour faire réapparaitre des ch :

$$\sum_{k=0}^{n} ch(kx) = \cdots = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1-chx+ch(nx)-ch((n+1)x)}{1-chx} & si\ x \neq 0 \\ n+1 & si\ x=0 \end{cases}$$

mais ce n'est pas nécessaire : on a enlevé les sommes, c'est ce qui compte.

On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{sh}(kx)$$

Ainsi, il suffit de dériver f pour trouver la somme recherchée. Si $x \neq 0$, on a

$$2f(x) = \frac{1-e^{(n+1)x}}{(1-e^{x})} + \frac{1-e^{-(n+1)x}}{(1-e^{-x})}$$

et donc

$$2f'(x) = \frac{(1-(n+1)e^{(n+1)x}) \times (1-e^{x}) - e^{x}\left(1-e^{(n+1)x}\right)}{(1-e^{x})^2} + \frac{(1+(n+1)e^{-(n+1)x}) \times (1-e^{-x}) - e^{-x}\left(1-e^{-(n+1)x}\right)}{(1-e^{-x})^2}$$

d'où on obtient l'expression voulue en divisant par 2.
Si $x=0$, on remarque que $\mathrm{sh}(kx)=0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $f'(0)=0$.

Exercice 18 **4)** L'expression a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\sin(\arctan x)$. Tout d'abord, comme il s'agit d'une fonction impaire en x, il suffit de calculer pour $x \in \mathbb{R}_+$. On a alors $\arctan x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\sin(\arctan x) \geq 0$, si bien que

$$\sin(\arctan x) = \sqrt{\sin^2(\arctan x)} = \sqrt{1-\cos^2(\arctan x)}$$

et il suffit alors d'utiliser la réponse du 3) pour obtenir le résultat voulu.

Exercice 19 *Méthode 1* : on pose $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ définie sur $[-1,1]$. Cette fonction est dérivable en tout $x \in]-1,1[$ et

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

donc la fonction f est constante sur l'intervalle $]-1,1[$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Pour conclure, on vérifie que $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{2}$, si bien que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Méthode 2 : soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} &\iff \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\ &\iff \cos(\arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \end{aligned}$$

Justifions la dernière équivalence. Le sens direct résulte d'une application de cos aux deux membres de l'égalité. Pour le sens réciproque, on applique arccos, ce qui est possible car $\cos(\arccos x) \in [-1, 1]$. On obtient

$$\arccos\left(\cos(\arccos x)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right)$$

Or, d'une part, $\arccos\left(\cos(\arccos x)\right) = \arccos x$ car $\arccos x \in [0, \pi]$ et d'autre part comme $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a de même $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \in [0, \pi]$, si bien que

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) &\iff x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) \\ &\iff x = \sin(\arcsin x) \\ &\iff x = x \end{aligned}$$

qui est toujours vrai. On en déduit que la relation $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ est également toujours vraie. D'où le résultat.

Exercice 21 L'équation a un sens si et seulement si $x \in [-1, 1]$ et $2x \in [-1, 1]$, càd si $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Méthode 1 : par équivalences.
Si $x < 0$, on a de même $2x < 0$ si bien que

$$\arcsin(2x) < 0 < \frac{\pi}{2} < \arccos x$$

et donc il suffit de chercher une solution $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Soit $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On affirme que

$$\arccos x = \arcsin(2x) \iff \cos(\arccos x) = \cos(\arcsin(2x))$$

En effet le sens direct résulte d'une application de cos. Dans le sens réciproque, on applique arccos, et comme $\arccos x \in [0, \pi]$, on a

$$\arccos(\cos(\arccos x)) = \arccos x$$

De même $\arcsin(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]$, donc $\arccos(\cos(\arcsin(2x))) = \arcsin(2x)$. Ainsi,

$$\arccos x = \arcsin(2x) \iff x = \cos(\arcsin(2x))$$

Et donc comme $\arcsin(2x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\arcsin(2x)) \geq 0$ si bien que

$$\cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(2x))} = \sqrt{1 - (2x)^2} = \sqrt{1 - 4x^2}$$

On,a donc, pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\begin{aligned} & x = \sqrt{1 - 4x^2} \\ \iff & x^2 = 1 - 4x^2 && \text{car } x \geq 0 \\ \iff & 5x^2 = 1 \\ \iff & x = \frac{1}{\sqrt{5}} && \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$.

Méthode 2 : par analyse-synthèse.
Analyse : soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ une solution de l'équation. On a

$$\arccos x = \arcsin(2x) \implies \cos(\arccos x) = \cos(\arcsin(2x))$$

Comme $\arccos x \in [0, \pi]$, on a $\cos(\arccos x) = x$. Par ailleurs, $\arcsin(2x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(\arcsin(2x)) \geq 0$. Ainsi

$$\cos(\arcsin(2x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(2x))} = \sqrt{1 - (2x)^2} = \sqrt{1 - 4x^2}$$

On en déduit que

$$x = \sqrt{1 - 4x^2} \geq 0$$

Cela impose que $x \geq 0$ donc $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On vérifie qu'alors on a bien $1 - 4x^2 \geq 0$. En passant au carré on a

$$x^2 = 1 - 4x^2$$

donc $5x^2 = 1$. D'où $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ car $x \geq 0$. Ceci prouve que $\mathcal{S} \subset \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$.

Synthèse : il faudrait vérifier que $\frac{1}{\sqrt{5}} \in \mathcal{S}$, mais cela est difficile. Ici, il suffit de montrer que $\mathcal{S} \neq \varnothing$, car en combinant cela avec $\mathcal{S} \subset \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$ on pourra conclure que $\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$. Ce n'est donc pas tout à fait une analyse-synthèse, mais le raisonnement reste valide.
Montrons donc que $\mathcal{S}$ est non vide, càd qu'il existe (au moins) une solution $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ de l'équation. Pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on pose

$$g(x) = \arccos x - \arcsin(2x)$$

La fonction g est strictement décroissante comme somme de fonctions strictement décroissantes ($\arccos$ et $x \mapsto -\arcsin(2x)$). De plus g est continue donc par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans $g\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$. Or,

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin(-1) = \frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{7\pi}{3}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \arccos\frac{1}{2} - \arcsin 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

Donc g réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dans $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}\right]$. Comme g est une bijection, il existe un (unique) $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(x) = 0$. Ainsi $\mathcal{S} \neq \varnothing$ (par unicité de la solution, on a même que $\mathcal{S}$ est un singleton). D'où le résultat :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$$

Exercice 22 Notons f cette fonction. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ a un sens si et seulement si $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]$. Or,

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 &\iff \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \\ &\iff \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \leq 1 \\ &\iff |1-x^2| \leq 1 + x^2 \end{aligned}$$

Distinguons les cas : si $1 - x^2 \geq 0$, alors on obtient $2x^2 \geq 0$, qui est toujours vrai. Si $1 - x^2 \leq 0$, on obtient $-1 \leq 1$, qui est à nouveau encore vrai. Donc $f(x)$ a toujours un sens et $D_f = \mathbb{R}$.
On remarque ensuite que f est paire donc on peut réduire le domaine d'étude à $D = \mathbb{R}_+$.
On a $f(0) = \arccos 1 = 0$ tandis que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$.

Étudions les variations de f. f est dérivable sur D comme composée et quotient de fonctions dérivables. Pour tout $x \geq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \times \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \times \frac{2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(0) = 0$ et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) > 0$. Le tableau de variations de f est donc

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	π

On voit que f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \pi$.

Il reste donc à tracer C_f sur D puis sur D_f par symétrie : on notera une tangente horizontale en 0. On peut aussi remarquer que $f(1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ ce qui peut aider au tracé.

Exercice 23 **1)** Supposons par l'absurde qu'une telle fonction f existe. Alors $f \circ \mathrm{ch} = \exp$. Or, exp est bijective, donc $f \circ \mathrm{ch}$ l'est aussi, ce qui entrainerait que ch soit injective. Ce n'est pas le cas car $\mathrm{ch}(-1) = \mathrm{ch}(1) = \frac{e+e^{-1}}{2}$. Contradiction. Donc une telle fonction f n'existe pas.

2) Par les mêmes arguments qu'à l'exercice 15, la fonction $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective. Sa réciproque argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ également et en particulier

$$\mathrm{argsh} \circ \mathrm{sh} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

Ainsi, si on pose $f = \exp \circ \mathrm{argsh}$, on voit que

$$f \circ \mathrm{sh} = \exp \circ \mathrm{argsh} \circ \mathrm{sh} = \exp$$

Donc une telle fonction f existe.

Correction des exercices donnés en colle

1. Vrai ou faux : toute fonction périodique est bornée

Faux : la fonction tan est périodique et non bornée.

2. Soit f paire et g impaire définies sur $\mathbb{R}$. Etudier la parité de $f \circ g$, de $f \times g$, de $f + g$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$ donc $f \circ g$ est paire.
Puis $f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x)$ donc fg est impaire.
Enfin, on ne peut rien dire de la parité de $f + g$. Par exemple, si $f(x) = 1$ et $g(x) = x$, on a $(f + g)(x) = x + 1$ qui n'est ni paire ni impaire.

3. Que dire d'une fonction impaire positive ?

Soit f une telle fonction. Montrons que $f = 0$. Soit $x \in D_f$. On a$f(-x) = -f(x)$ donc

$$f(-x) + f(x) = 0$$

Or, $f(-x) \geq 0$ et $f(x) \geq 0$, donc nécessairement $f(-x) = f(x) = 0$. Par arbitraire sur x, $f = 0$.
Réciproquement, si $f = 0$, on voit bien que f est impaire et positive. C'est donc l'unique fonction qui vérifie cette propriété.

4. Que dire d'une fonction paire croissante ?

Soit f une telle fonction. Montrons que f est constante. Soient $x_1, x_2 \in D_f$. Montrons que $f(x_1) = f(x_2)$. Quitte à échanger x_1, x_2, on peut toujours supposer $x_1 \leq x_2$. Alors comme f est croissante, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$. Maintenant :

- Si $-x_2 \leq x_1$ alors par croissance et parité de f on a $f(x_2) = f(-x_2) \leq f(x_1)$, si bien que $f(x_1) = f(x_2)$.
- Si $-x_2 \geq x_1$, alors $x_2 \leq -x_1$, et donc par croissance et parité de f on a $f(x_2) \leq f(-x_1) = f(x_1)$, si bien que $f(x_1) = f(x_2)$.

Dans tous les cas, on trouve que f est constante.
Réciproquement, si f est constante, il est clair que f est paire et constante. Les fonctions constantes sont donc les seules fonctions qui vérifient cette propriété.

5. Dessiner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire et surjective.

On peut par exemple dessiner une fonction telle que $f(x) = x \sin x$.

6. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction paire dérivable. On pose $g : x \in D_f \mapsto f(-x)$. Alors g est dérivable par composition et pour tout $x \in D_f$

$$g'(x) = -f'(-x)$$

Mais on a aussi $g(x) = f(x)$ et donc $g'(x) = f'(x)$. Ainsi, $f'(x) = -f'(-x)$ ce qui implique

$$f'(-x) = -f'(x)$$

donc f' est impaire.

7. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$. Alors pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\sin(2x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

et donc lorsque x tend vers 0, ce taux d'accroissement tend vers $f'(0) = 2\cos(0) = 2$. Finalement

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$$

8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$.

Idem que ci-dessus, on trouve $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha$.

9. Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - ax + a^2}$.

$f(x)$ a un sens si et seulement si $x^2 - ax + a^2 \geq 0$. Or, le discriminant de ce trinôme en x est

$$\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 \leq 0$$

- Si $a \neq 0$ alors $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine réelle et est du signe du coefficient de plus haut degré, 1, donc est strictement positif.
- Si $a = 0$ alors le polynôme devient x^2, qui est toujours positif.

Dans tous les cas, $x^2 - ax + a^2 \geq 0$ et donc $D_f = \mathbb{R}$.
(La fonction f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.)
On a

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - ax + a^2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 - ax + a^2 = +\infty$$

et donc $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.
Si $a = 0$, alors $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ et sa représentation graphique est évidente. Si $a \neq 0$, alors $x^2 - ax + a^2 > 0$ et donc la fonction f est dérivable par composition. Ainsi pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - ax + a^2}} \times (2x - a)$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ si et seulement si $2x - a > 0$, càd $x > \frac{a}{2}$. On peut donc tracer le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3a^2}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer la fonction f.

10. Etudier $f(x) := \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

$f(x)$ a un sens si et seulement si $x \neq 0$ et $x^2 - 1 \geq 0$, càd $x \neq 0$ et $|x| \geq 1$. Ainsi $D_f = \mathbb{R} \backslash]-1, 1[$.
Pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2 - 1}}{-x} = -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = -f(x)$$

ainsi f est impaire. On peut réduire le domaine d'étude à $D = [1, +\infty[$.
Il est clair que $f(1) = \frac{\sqrt{1^2-1}}{1} = 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in D$,

$$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Étudions les variations de f : la fonction racine n'est pas dérivable en zéro, donc f est dérivable en tout $x \in D$ tel que $x^2 - 1 \neq 0$, càd sur $]1, +\infty[$. Pour tout $x > 1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \times \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \times 2x \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \\ &\iff 1 > \frac{x^2 - 1}{x^2} \\ &\iff 0 > -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f' > 0$. Le tableau de variations de f est alors

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors en déduire le tracé de f sur D, puis sur D_f par symétrie. On peut également montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \to 1]{} +\infty$, et donc on a une demi-tangente verticale en $x = 1$.

11. Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

On trouve $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \times \cos x$.

12. Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \tan x \cos^4 x$.

On trouve

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+\tan^2 x)\cos^4 x - 4\tan x \cos^3 x \sin x \\
&= \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x - 4\cos^2 x \sin^2 x \\
&= \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^2 x
\end{aligned}$$

13. Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

Comme $f(x) = e^{\sin x \ln \cos x}$, on trouve

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\cos x \ln(\cos x) + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right) e^{\sin x \ln \cos x} \\
&= \left(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) e^{\sin x \ln \cos x}
\end{aligned}$$

14. Dériver (sans justifier pour quelles valeurs cela est possible) $f(x) = \ln\left(\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)\right)$.

Pour la clarté du corrigé, on s'autorise une pseudo-notation (à ne pas faire sur la copie) :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\ln\left(\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)\right)\right]' \\
&= \frac{1}{\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)} \times \left[\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)\right]' \\
&= \frac{1+\tan^2\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)}{\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)} \times \left[1+\sqrt{\sin(x^2)}\right]' \\
&= \frac{1+\tan^2\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)}{\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)} \times \frac{1}{2\sqrt{\sin(x^2)}}\left[\sin(x^2)\right]' \\
&= \frac{1+\tan^2\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)}{\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)} \times \frac{\cos(x^2)}{2\sqrt{\sin(x^2)}}\left[x^2\right]' \\
&= \frac{1+\tan^2\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)}{\tan\left(1+\sqrt{\sin(x^2)}\right)} \times \frac{\cos(x^2)}{2\sqrt{\sin(x^2)}} \times 2x
\end{aligned}$$