Exercice 4 **1)** Pour tout ensemble X,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff X \subset A \cap B \\ &\iff X \subset A \text{ et } X \subset B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ et } X \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ par arbitraire sur X.
2) Pour tout ensemble X,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \text{ ou } X \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \subset A \text{ ou } X \subset B \\ &\color{red}{\implies} X \subset A \cup B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

Notez que comme on a perdu l'équivalence on a juste prouvé une implication. Par arbitraire sur X, on a donc $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
Ce n'est toutefois pas une égalité. Le raisonnement ci-dessus nous donne l'idée d'un contre-exemple : il suffit de prendre X tel que $X \subset A \cup B$ mais X n'est pas inclus ni dans A ni dans B. Par exemple,

$$A = \{0, 1\} \quad B = \{2, 3\} \quad X = \{1, 2\}$$

Alors clairement $X \subset A \cup B$ donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Pourtant, $X \notin \mathcal{P}(A)$ et $X \notin \mathcal{P}(B)$ donc $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Exercice 5 **1)** Voir le graphique avec la légende “La différence symétrique” sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_des_parties_d'un_ensemble#Diff%C3%A9rence_sym%C3%A9trique`
2)

$$\begin{aligned} A\Delta A &= (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \varnothing \\ A\Delta\varnothing &= (A \cup \varnothing)\backslash(A \cap \varnothing) = A\backslash\varnothing = A \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B)\backslash(A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} \\ &= (A \cup B) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\ &= \left(A \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \bigcup \left(B \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right)\right) \\ &= \left((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})\right) \bigcup \left((B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})\right) \\ &= \left(\varnothing \cup (A \cap \overline{B})\right) \bigcup \left((B \cap \overline{A}) \cup \varnothing\right) \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \end{aligned}$$

4) Par la question précédente,

$$\begin{aligned} \overline{A}\Delta\overline{B} &= (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \\ &= A\Delta B \end{aligned}$$

5) En reformulant la question 3), on voit que

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

donc pour être élément de $A\Delta B$, il suffit d'être *ou bien* dans A *ou bien* dans B (ou exclusif : il ne faut pas être dans $A\cap B$).

Soient $A,B,C\in\mathcal{P}(E)$. On suppose $A\Delta B=A\Delta C$. Montrons que $B=C$. Tout d'abord, montrons que $B\subset C$. Soit $x\in B$, montrons que $x\in C$.

- Si $x\notin A$, alors $x\in B\backslash A$, donc $x\in A\Delta B=A\Delta C$. Donc
$$x\in(A\backslash C)\cup(C\backslash A)$$
Comme $x\notin A$, on a $x\notin A\backslash C$, si bien que $x\in C\backslash A$, donc $x\in C$.

- Si $x\in A$, on affirme qu'alors $x\in C$. En effet, supposons par l'absurde que $x\notin C$. Alors $x\in A\backslash C$, donc $x\in A\Delta C=A\Delta B$. Donc
$$x\in(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$
Or, par hypothèse, on a $x\in B$ et $x\in A$, donc $x\in A\cap B$. Cela contredit la ligne précédente. Donc ce cas n'arrive jamais.

Dans tous les cas, $x\in C$.

Exercice 7 (k) Montrons que k est injective : soient $x,x'\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors

$$\begin{aligned}k(x)=k(x') &\implies \frac{x+1}{x-1}=\frac{x'+1}{x'-1}\\ &\implies (x+1)(x'-1)=(x'+1)(x-1)\\ &\implies xx'+x'-x-1=x'x+x-x'-1\\ &\implies x'-x=x-x'\\ &\implies 2x'=2x\\ &\implies x'=x\end{aligned}$$

Donc k est injective.

Vérifions si k est surjective. Soit $y\in\mathbb{R}$. Cherchons $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ tel que $k(x)=y$.

$$\begin{aligned}k(x)=y &\iff \frac{x+1}{x-1}=y\\ &\iff x+1=y(x-1)\\ &\iff y+1=x(y-1)\end{aligned}$$

Si $y\neq 1$, alors $x=\frac{y+1}{y-1}$ vérifie $k(x)=y$ *(c'est même l'unique solution)*

Si $y=1$, alors l'équation devient $2=y+1=x(y-1)=0$, ce qui est absurde. Donc si $y=1$, il n'y a pas de x solution dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ainsi, k n'est pas surjective. *(En revanche, k est surjective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, et même bijective car la solution x est unique)*

Comme k est non surjective, elle n'est pas bijective.

Exercice 9 **1)** Soit $B\subset Y$. On procède par double inclusion. Soit $y\in f(f^{-1}(B))$. Alors il existe $x\in f^{-1}(B)$ tel que $f(x)=y$. Ainsi
$$y=f(x)\begin{cases}\in B & \text{car } x\in f^{-1}(B)\\ \in f(X) & \text{car } x\in X\end{cases}$$
Ainsi, $y\in B\cap X$. Par arbitraire sur y, $f(f^{-1}(B))\subset B\cap f(X)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in B \cap f(X)$. Alors il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Or, $y \in B$ donc $f(x) \in B$. On en déduit que $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, $f(x) \in f(f^{-1}(B))$ et on en déduit que $y \in f(f^{-1}(B))$. Par arbitraire sur y, $B \cap f(X) \subset f(f^{-1}(B))$.

2) On procède par double implication. Si f est surjective, alors $f(X) = Y$. Par la question 1), on a ainsi

$$\forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B \cap Y = B$$

ce qui montre l'implication directe.

Maintenant supposons que $\forall B \subset Y \quad f(f^{-1}(B)) = B$ et montrons que f est surjective. En prenant $B = Y$, on obtient

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

Or, $f^{-1}(Y) \subset X$ par définition. Ainsi

$$Y = f(f^{-1}(Y)) \subset f(X)$$

et par ailleurs l'inclusion $f(X) \subset Y$ est évidente. On en déduit que $f(X) = Y$, donc que f est surjective.

3) On procède par double implication. Supposons que f soit injective et montrons que $\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A$.

Soit $A \subset X$. On procède par double inclusion. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ par définition. Et donc $x \in f^{-1}(f(A))$, à nouveau par définition. Par arbitraire sur x, on en déduit que $A \subset f^{-1}(f(A))$ *(on notera que cela n'utilise pas l'hypothèse d'injectivité de f, ça se "voit" sur un dessin).*

Montrons maintenant l'inclusion réciproque. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors par définition $f(x) \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = f(x)$. Or, f est injective, donc $x = x' \in A$. Ainsi par arbitraire sur x, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Par double implication, on a donc $f^{-1}(f(A)) = A$. On a ainsi montré l'implication directe.

Montrons maintenant l'implication réciproque. Supposons que $\forall A \subset X \quad f^{-1}(f(A)) = A$ et montrons que f est injective. Soient $x, x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$. On considère $A = \{x\} \subset X$. Alors $f(A) = \{f(x)\}$ et par hypothèse,

$$f^{-1}\left(\{f(x)\}\right) = f^{-1}(f(A)) = A = \{x\}$$

Or, $x' \in f^{-1}\left(\{f(x)\}\right)$ puisque $f(x') = f(x)$. Ainsi, $x' \in \{x\}$. Finalement, $x' = x$ et f est injective.

Exercice 11 **1)** Soit $x \in E$

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{1}_A(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \overline{A} \\ 1 & \text{si } x \in \overline{A} \end{cases} \\ &= \mathbf{1}_{\overline{A}}(x) \end{aligned}$$

2) Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B)(x) &= \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) \\ &= \begin{cases} 1 \times 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 1 \times 0 & \text{si } x \in A \backslash B \\ 0 \times 1 & \text{si } x \in B \backslash A \\ 0 \times 0 & \text{si } x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap B \\ 0 & \text{si } x \notin A \cap B \end{cases} \\ &= \mathbf{1}_{A \cap B}(x) \end{aligned}$$

3) *Non rédigé :*

$f + g - fg = \mathbf{1}_{A\cup B}$

Exercice 12 **1)** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in [0,1] &\implies 0 \leq x \leq 1 \\ &\implies 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \qquad \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\implies x^2 \in [0,1] \end{aligned}$$

donc $f([0,1]) \subset [0,1]$, cet ensemble est stable par f.
L'ensemble $[1,2]$ n'est pas stable par f, en effet $f(2) = 4 \notin [1,2]$. (Ou encore $f([1,2]) = [1,4] \not\subset [1,2]$)

Si $x \in [-1,1]$, alors $|x| \leq 1$, si bien que $|x|^2 \leq 1$ par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $|x^2| \leq 1$ et donc $x^2 \in [-1,1]$. Par arbitraire sur x, $f([-1,1]) \subset [-1,1]$. Cet ensemble est donc stable par f

Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = x^2 \in [0,+\infty[$. Donc $f(\mathbb{R}_+) \subset [0,+\infty[$. Cet ensemble est donc stable par f.

2) Soit $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Ainsi, il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Soit $j \in I$. Par hypothèse, $x \in A_j$. Comme A_j est stable par f, on en déduit que $y = f(x) \in A_j$. Par arbitraire sur j, on a $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Par arbitraire sur y, on a donc

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$$

Soit $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$. Ainsi, il existe $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Soit $j \in I$. Par hypothèse, $x \in A_j$. Comme A_j est stable par f, on en déduit que $y = f(x) \in A_j$. Par arbitraire sur j, on a $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Par arbitraire sur y, on a donc

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$$

Le résultat pour $\bigcup_{i\in I} A_i$ suit presque le même raisonnement. A vous de compléter.

Exercice 14 **1)** Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x \leq x \\ y \leq y \end{cases}$$

donc $(x,y)\mathcal{R}(x,y)$ et $\mathcal{R}$ est réflexive.

Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x,y)\mathcal{R}(x',y')$ et $(x',y')\mathcal{R}(x,y)$. Alors

$$\begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' \leq x \\ y' \leq y \end{cases}$$

donc $(x,y) = (x',y')$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Soient $(x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$. On suppose $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ et $(x', y')\mathcal{R}(x'', y'')$. Alors

$$\begin{cases} x \leq x' \leq x'' \\ y \leq y' \leq y'' \end{cases}$$

et ainsi $(x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$. Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.
Cet ordre est partiel. En effet $(1, 0)\mathcal{R}(0, 1)$ est fausse et de même pour $(0, 1)\mathcal{R}(1, 0)$.

2) Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ un majorant de $\{(x_0, y_0)\}$, càd $(x_0, y_0)\mathcal{R}(X, Y)$. Cela signifie

$$\begin{cases} x_0 \leq X \\ y_0 \leq Y \end{cases}$$

Donc l'ensemble des majorants est

$$\left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X \geq x_0 \text{ et } Y \geq y_0\right\}$$

Par exemple si $x_0 = y_0 = 0$, alors la région constitue la région au-dessus de l'axe des abscisses et à droite de l'axe des ordonnées.

Exercice 15 **1)** Soit $x \in \mathbb{C}$. $|x| = |x|$ donc $x\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Si $x\mathcal{R}y$, on a $|x| = |y|$. D'où $|y| = |x|$ si bien que $y\mathcal{R}x$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, on a $|x| = |y| = |z|$ si bien que $|x| = |z|$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive. Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition,

$$\begin{aligned} [z] &= \{\omega \in \mathbb{C} \mid z\mathcal{R}\omega\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| = |z|\} \end{aligned}$$

$[z]$ correspond donc au cercle de centre l'origine et de rayon $|z|$.

Exercice 16 **1)** L'ensemble $E = \{0\}$ est bien ordonné pour la relation $\leq$ de $\mathbb{R}$: si $A \subset E$ est non vide, alors $A = E = \{0\}$ et A admet bien 0 pour plus petit élément.
Montrons que l'ensemble $E = \mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné pour la relation $\leq$. On pose $A =]0, 1] \subset E$ et on va montrer que A n'admet pas de plus petit élément. Supposons par l'absurde qu'il existe un plus petit élément m. Alors $m \in A$ et pour tout $x \in A$ on a $m \leq x$. Or,

$$m \in A \implies 0 < m \leq 1 \implies 0 < \frac{m}{2} \leq \frac{1}{2} \implies \frac{m}{2} \in A$$

En prenant $x = \frac{m}{2} \in A$, on en déduit donc $m \leq \frac{m}{2}$. Comme $m > 0$, on obtient $1 \leq \frac{1}{2}$. Contradiction. Donc A n'admet pas de plus petit élément.

2) Supposons que $(E, \preceq)$ soit bien ordonné. Montrons que $\preceq$ définit un ordre total. Soient $x, y \in E$. Alors en posant $A = \{x, y\} \subset E$, on sait que A admet un plus petit élément $m \in A$.

- Si $m = x$, on a $x = m \leq y$.
- Si $m = y$, on a $y = m \leq x$.

Dans tous les cas, on a donc $x \leq y$ ou $y \leq x$. L'ordre est bien total.

3) Non : si on pose $E =]0,1] \subset \mathbb{R}$, alors la relation d'ordre $\leq$ définit bien un ordre total sur E (c'est évident). Cependant, E n'est pas bien ordonné pour $\leq$. En effet, en prenant $A = E$, on a vu que A n'admet pas de plus petit élément pour $\leq$.

Exercice 18 **1)** Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} f(z) = 1 &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} = 1 \\ &\iff \overline{z} + 1 = z - 1 \\ &\iff z - \overline{z} = 2 \\ &\iff 2i\mathrm{Im}z = 2 \\ &\iff i\mathrm{Im}z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Or cette dernière égalité est fausse : en passant à la partie réelle, on trouve (comme $\mathrm{Im}z \in \mathbb{R}$) que $-1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, $f(z) = 1$ est toujours faux. D'où le résultat.

2)

$$\begin{aligned} f(i\mathbb{R}) &= \{f(z) \mid z \in i\mathbb{R} \cap (\mathbb{C} \backslash \{1\})\} \\ &= \{f(z) \mid z \in i\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Soit $z \in i\mathbb{R}$. On pose $b \in \mathbb{R}$ tel que $z = ib$. Alors

$$f(z) = \frac{-ib+1}{ib-1} = -\frac{ib-1}{ib-1} = -1$$

ainsi, par arbitraire sur z, $f(i\mathbb{R}) = \{-1\}$.

3) Par la question 2), on a $f(i) = f(-i) = -1$ donc f n'est pas injective. Par la question 1), $1 \in \mathbb{C}$ n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est pas surjective. Enfin f n'est pas bijective car non injective (ou non surjective).

4) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} = \overline{\left(\frac{\overline{z}+1}{z-1}\right)} \\ &\iff \frac{\overline{z}+1}{z-1} = \frac{z+1}{\overline{z}-1} \\ &\iff (\overline{z}+1)(\overline{z}-1) = (z+1)(z-1) \\ &\iff \overline{z}^2 - 1 = z^2 - 1 \\ &\iff \overline{z}^2 = z^2 \end{aligned}$$

Si $z=0$, cette dernière égalité est vraie, donc $0 \in f^{-1}(i\mathbb{R})$. Si $z \neq 0$, en posant $z = re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{z}^2 = z^2 &\iff (re^{-i\theta})^2 = (re^{i\theta})^2 \\
&\iff r^2 e^{-2i\theta} = r^2 e^{2i\theta} \\
&\iff e^{-2i\theta} = e^{2i\theta} \\
&\iff e^{4i\theta} = 1 \\
&\iff 4\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&\iff \theta \equiv 0 \quad [\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\
&\iff z \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad z \in i\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(i\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}) \backslash \{1\}$.

5) a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Alors

$$\begin{aligned}
g(x) = g(x') &\implies \frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1} \\
&\implies 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x'-1} \\
&\implies \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x'-1} \\
&\implies x'-1 = x-1 \\
&\implies x' = x
\end{aligned}$$

donc g est injective. *Il n'y a pas besoin de plus justifier que cela : par exemple pour prouver l'avant-dernière implication, on peut simplement multiplier les deux côtés de l'équation par* $(x-1)(x'-1)$.

5) b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrons que $g(x) \neq 1$. Supposons par l'absurde que $g(x) = 1$. Alors

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 \implies x+1 = x-1 \implies 1 = -1$$

Contradiction. Donc $g(x) \neq 1$. Par arbitraire sur x, on a $g(\mathbb{R}\backslash\{1\}) \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

5) c) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Comme $g(x) \neq 1$ par la question b), on en déduit que $g(g(x))$ a un sens. Alors

$$g(g(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

5) d) Par ce qui précède, $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\backslash\{1\}}$. L'application g est donc une involution sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Ainsi, g est une bijection de réciproque $g^{-1} = g$.

5) e) Par la question précédente, $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$ est bijective donc surjective. On en déduit que $g(\mathbb{R}\backslash\{1\}) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Correction des exercices donnés en colle

Applications

1. L'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On vérifie que f est une involution, elle est donc bijective, donc également injective et surjective.

2. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Idem que ci-dessus.

3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On voit que $f(1, 0) = f(0, 1) = 0$, donc f n'est pas injective. Montrons que f est surjective : soit $z \in \mathbb{R}$. Alors $f(1, z) = z$, si bien que f est surjective. Enfin, f n'est pas bijective car non injective.

4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = |x|$ est surjective mais non injective. Trouver $A \subset \mathbb{R}$ telle que $f|_A$ soit bijective.

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Alors $f(y) = |y| = y$ (càd $f(x) = y$ avec $x = y$), donc f est surjective. Cependant, $f(1) = f(-1) = 1$ donc f n'est pas injective.
Si on pose $A = \mathbb{R}_+$, alors montrons que $f|_A : A \to \mathbb{R}_+$ est bijective. La surjectivité se démontre comme ci-dessus. Montrons que $f|_A$ est injective. Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} f|_A(x) = f|_A(x') &\implies f(x) = f(x') \\ &\implies |x| = |x'| \\ &\implies x = x' \end{aligned}$$

d'où le résultat.

5. On pose $f : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}$. Est-ce que cela définit une application ?

Non, f n'est pas une application : si $u_n = n$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \notin \mathbb{R}$ *(on pouvait aussi prendre $u_n = (-1)^n$).*

6. On pose $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \arg z \in \mathbb{R}$. Est-ce que cela définit une application ?

Non, f n'est pas une application : l'argument de z est défini à 2π près.

7. Soit $f(x) = x^2$. Déterminer $f([-1, 2])$ et $f^{-1}([1, 2[)$

Soit $x \in [-1, 2]$. Si $x \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} -1 \leq x \leq 0 &\implies (-1)^2 \geq x^2 \geq 0^2 \qquad \text{par décroissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_- \\ &\implies 0 \leq x^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Si $x \geq 0$, on trouve $0 \leq x \leq 2 \implies 0 \leq x^2 \leq 4$. Finalement, $f([-1, 2]) = [0, 4]$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([1, 2[) &\iff 1 \leq f(x) < 2 \\ &\iff 1 \leq x^2 < 2 \\ &\iff \sqrt{1} \leq \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \qquad \text{par stricte croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ et de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \quad (*) \\ &\iff 1 \leq |x| < \sqrt{2} \\ &\iff x \in]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[\end{aligned}$$

Par arbitraire sur x, on en déduit $f^{-1}([1, 2[) =]-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}[$.
Pour $(*)$, il faut justifier les deux sens de l'équivalence, donc on doit utiliser la croissance de la racine carrée et de sa réciproque la fonction carré. De plus, pour conserver l'inégalité stricte, on doit utiliser la stricte croissance des deux fonctions.

8. L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

f n'est pas injective car $f(0) = 1 = f(i2\pi)$. De plus, f n'est pas surjective car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \in \mathbb{C}^*$, si bien que 0 n'a pas d'antécédent par f. Elle n'est pas bijective car non surjective.

9. L'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$f(-1) = 1 = f(1)$ donc f n'est pas injective. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Vérifions s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = z^2 = \omega$. Cette équation signifie que z est une racine carrée de ω. Or une telle racine carrée existe toujours (si $\omega = 0$ alors $z = 0$, et si $\omega = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, alors $z = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ convient). Donc f est surjective. Mais f n'est pas bijective car non injective.

10. L'application $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$f(0) = 1 = f(2\pi)$ donc f n'est pas injective. Si $\omega \in \mathbb{U}$, alors $|\omega| = 1$ donc la forme exponentielle de ω est $\omega = 1 \times e^{i\theta} = f(\theta)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi f est surjective. Mais f n'est pas bijective car non injective.

11. L'application $f : (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] \mapsto re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Soient $(r, \theta), (r', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$. Alors

$$\begin{aligned} f(r,\theta) = f(r',\theta') &\implies re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \\ &\implies r = r' \quad \text{et} \quad \theta \equiv \theta' \quad [2\pi] \end{aligned}$$

On affirme que cela entraîne $\theta = \theta'$. En effet, si $\theta \neq \theta'$, on aurait $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$ et comme $\theta \in]-\pi, \pi]$, on aurait $\theta' \notin]-\pi, \pi]$, ce qui serait une contradiction. On en déduit que f est injective. En revanche, f n'est pas surjective, car $0 \in \mathbb{C}$ n'a pas de forme exponentielle ($re^{i\theta} = 0$ entrainerait $r = 0$).

12. L'application $f : n \in \mathbb{N} \mapsto n^2 - n \in \mathbb{N}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$f(1) = 0 = f(0)$ donc f n'est pas injective. Pour la surjectivité, on remarque que $f(n) = n(n-1) \in 2\mathbb{N}$ en faisant une disjonction de cas selon que n soit pair ou impair. Ainsi, par exemple, $1 \notin f(\mathbb{N})$, si bien que f n'est pas surjective.

13. L'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^3 = y \\ &\iff x = \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$

donc il existe une unique solution dans $\mathbb{R}$: f est bijective. Donc elle est également injective et surjective.

14. Construire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$

$f : n \in \mathbb{N} \mapsto (n+1) \in \mathbb{N}^*$ est une bijection, car on vérifie facilement que $g : n \in \mathbb{N}^* \mapsto (n-1) \in \mathbb{N}$ est sa réciproque.

15. On pose $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x}{x+1}$. Calculer $(f \circ f)(x)$ puis $f^n(x) := (f \circ \cdots \circ f)(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= \frac{f(x)}{f(x) + 1} \\ &= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{x + x + 1} = \frac{x}{2x + 1} \end{aligned}$$

Pour calculer f^n, on fait un raisonnement par récurrence. On peut vérifier au brouillon que $f^3(x) = \frac{x}{3x+1}$, ce qui nous donne une idée de l'hypothèse de récurrence. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $H_n : f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$.
Il est évident que H_1 est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons H_n et montrons H_{n+1}. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= (f^n \circ f)(x) \\ &= \frac{f(x)}{nf(x)+1} && \text{par } H_n \\ &= \frac{\frac{x}{x+1}}{n\frac{x}{x+1}+1} \\ &= \frac{x}{nx+x+1} = \frac{x}{(n+1)x+1} \end{aligned}$$

et donc H_{n+1} est vraie. Ainsi, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f surjective.

Soit $y \in F$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $g(y) \in G$, et que $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que

$$g(y) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Or, g étant injective, $y = f(x)$: on a démontré l'injectivité.

17. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g injective.

Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Montrons que $y = y'$. Comme f est surjective, il existe $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Alors

$$\begin{aligned} g(y) = g(y') &\implies g(f(x)) = g(f(x')) \\ &\implies x = x' && \text{car } g \circ f \text{ est injective} \\ &\implies f(x) = f(x') \\ &\implies y = y' \end{aligned}$$

Donc g est injective.

18. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Montrer que $h \circ g$ et $g \circ f$ sont bijectives si et seulement si f, g, h sont bijectives.

Le sens réciproque est évident car la composée de bijections est bijective. Montrons le sens direct. Comme $h \circ g$ est bijective, on sait que g est injective. Comme $g \circ f$ est bijective, on en déduit que g est surjective. Ainsi g est bijective. Alors,

$$h = (h \circ g) \circ g^{-1}$$

c'est-à-dire que h est la composée de deux fonctions bijectives. Donc h est bijective. De même, f est bijective.

19. Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

On a déjà $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ (qui est vrai pour tout application, même non injective). Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x_A \in A$ et $x_B \in B$ tels que

$$f(x_A) = y = f(x_B)$$

et comme f est injective, $x_A = x_B$, donc $x_A \in A \cap B$. Ainsi, $y = f(x_A) \in f(A \cap B)$. On en déduit $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ par arbitraire sur y. D'où le résultat.

20. Construire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Il suffit de construire une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ et de considérer sa réciproque pour avoir une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Par exemple

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0 \\ 2|n|+1 & \text{si } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que f est bien définie. Montrons qu'elle est bijective. Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $f(n) = f(n')$. Alors $f(n)$ et $f(n')$ ont la même parité. Par la définition de f on en déduit que n, n' ont le même signe. Si $n, n' < 0$, on a

$$\begin{aligned} f(n) = f(n') & \implies 2|n|+1 = 2|n'|+1 \\ & \implies |n| = |n'| \\ & \implies -n = -n' \\ & \implies n = n' \end{aligned}$$

Et on montre facilement le même résultat dans le cas $n, n' \geq 0$. Ainsi, f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors

$$m \in 2\mathbb{N} \implies f\left(\frac{m}{2}\right) = 2\frac{m}{2} = m$$

$$m \in 2\mathbb{N}+1 \implies f\left(-\frac{m-1}{2}\right) = 2\left|-\frac{m-1}{2}\right| + 1 = 2 \times \frac{m-1}{2} + 1 = m - 1 + 1 = m$$

Dans tous les cas, on trouve donc un antécédent à m. Ainsi f est surjective. Finalement f est bijective et f^{-1} est la bijection recherchée.

21. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f injective si et seulement si f surjective.

Supposons f injective. Soit $x \in E$. Comme

$$f\,(\,f(f(x))\,) = f(x)$$

on en déduit par injectivité de f que $f(f(x)) = x$, ainsi $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Comme $f \circ f$ est bijective, on a que f est surjective.

Réciproquement, supposons f surjective. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Or, f est surjective donc il existe $z, z' \in E$ tels que $f(z) = x$ et $f(z') = x'$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') & \implies f(f(z)) = f(f(z')) \\ & \implies f\,(\,f(f(z))\,) = f\,(\,f(f(z'))\,) \\ & \implies f(z) = f(z') && \text{car } f \circ f \circ f = f \\ & \implies x = x' \end{aligned}$$

D'où f est injective.

Relations

22. Soit E un ensemble.
    (a) Vérifier que $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Est-ce un ordre total ?
    (b) Quel est le plus petit élément de $\mathcal{P}(E)$ pour $\subset$? Le plus grand ?
    (c) Soient $A, B \subset E$. Donner un majorant de $\{A, B\}$ et un minorant de $\{A, B\}$.

a) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.
$A \subset A$ donc $\subset$ est réflexive.

Si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$, donc $\subset$ est antisymétrique.

Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$, donc $\subset$ est transitive.

b) Il est clair que $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ et que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $\varnothing \subset A$. Donc $\varnothing$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\subset$.

De même, on montre que E est le plus grand élément de $\mathcal{P}(E)$ pour la relation $\subset$.

c) Il est clair que $\varnothing \subset A \subset E$ et que $\varnothing \subset B \subset E$. Donc $\varnothing$ et E sont respectivement un minorant et un majorant de $\{A, B\}$.

On aurait aussi pu prendre $A \cap B$ et $A \cup B$ au lieu de $\varnothing$ et E.

23. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y$ ssi $x + y$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe d'équivalence de x, en discutant selon la parité de x.

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$. On a $x + x = 2x \in 2\mathbb{Z}$ donc $x\mathcal{R}x$: $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si $x\mathcal{R}y$ alors $x + y \in 2\mathbb{Z}$. Il est évident qu'alors $y + x \in 2\mathbb{Z}$, donc $y\mathcal{R}x$: $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x + y$ et $y + z$ sont pairs. Donc

$$x + y + y + z = x + 2y + z \in 2\mathbb{Z}$$

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2y + z = 2k$, donc $x + z = 2(k - y) \in 2\mathbb{Z}$, si bien que $x\mathcal{R}z$: $\mathcal{R}$ est transitive. Finalement, $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.

On a $y \in [x]$ si et seulement si $x + y$ est pair.

- Si x est pair, alors $y \in [x]$ si et seulement si y est pair, donc $[x] = 2\mathbb{Z}$.
- Si x est impair, alors de même on trouve $[x] = 2\mathbb{Z} + 1$.

24. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}$ par $x \preceq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer que c'est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a $f(x) \leq f(x)$ donc $x \preceq x$: $\preceq$ est réflexive.

Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, on a $f(x) \leq f(y) \leq f(x)$ donc $f(x) = f(y)$. Comme f est injective, on en déduit que $x = y$: $\preceq$ est antisymétrique.

Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, on a $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$, donc $f(x) \leq f(z)$, si bien que $x \preceq z$: $\preceq$ est transitive. Ainsi $\preceq$ est une relation d'ordre.

Montrons que cet ordre est total : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq f(y)$ ou $f(y) \leq f(x)$: donc $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. D'où le résultat.