Espaces préhilbertiens – Corrigé partiel

Exercice 16

Etape 1 : interprétation en termes de distance à un s.e.v. On considère le produit scalaire canonique sur $C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$, que l'on note :

$$\forall f,g \in C^0([0,2\pi],\mathbb{R}) \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

et on note $\|\cdot\|$ sa norme associée, i.e. $\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2}$. On pose également pour tous $a,b \in \mathbb{R}$,

$$I_{a,b} = \int_0^{2\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2\, dx$$

On remarque que, comme $\mathrm{id}(x) = x$,

$$I_{a,b} = \|\mathrm{id} - (a\cos + b\sin)\|^2 = d(\mathrm{id}, a\cos + b\sin)^2$$

de sorte que, si on pose

$$F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

alors

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} I_{a,b} = d(\mathrm{id}, F)^2$$

Etape 2 : obtenir une base orthonormée de F. Il faut donc calculer la distance de la fonction id à F. Si on note p_F le projecteur orthogonal sur F, on a donc

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} I_{a,b} = \|\mathrm{id} - p_F(\mathrm{id})\|^2$$

Calculons $p_F(\mathrm{id})$. Pour cela, on cherche une base orthonormée de F. On pose

$$u_1 = \cos$$

$$u_2 = \sin - \frac{\langle \sin, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1$$

Or,

$$\langle \sin, u_1\rangle = \int_0^{2\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Donc $u_2 = \sin$. Ensuite, on pose

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \qquad \varepsilon_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

Comme

$$\|u_1\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos(2x))\, dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\, dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\pi}$$

on en déduit que

$$\varepsilon_1 = \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}$$

Ainsi, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F.

Etape 3 : calcul du projeté sur F. Puisque $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F, on en déduit que pour toute fonction $f \in C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$,

$$p_F(f) = \langle f, \varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 + \langle f, \varepsilon_2\rangle \varepsilon_2$$

Pour $f = \mathrm{id}$, on calcule

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{id}, \varepsilon_1\rangle &= \int_0^{2\pi} x\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x\cos x dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[x\sin x\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\sin x dx \\
&= 0 - 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{id}, \varepsilon_2\rangle &= \int_0^{2\pi} x\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} x\sin x dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-x\cos x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\cos x dx \\
&= -\frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} + 0 \\
&= -2\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$p_F(\mathrm{id}) = -2\sqrt{\pi}\varepsilon_2 = -2\sin$$

Etape 4 : calcul (du carré) de la distance à F. La valeur recherchée est donc

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{id} - p_F(\mathrm{id})\|^2 &= \|\mathrm{id} + 2\sin\|^2 \\
&= \int_0^{2\pi}(x + 2\sin x)^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi}\left(x^2 + 2x\sin x + 4\sin^2 x\right)dx
\end{aligned}$$

On a déjà calculé précédemment que $\int_0^{2\pi} x\sin x dx = -\pi$ et $\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx = \pi$, donc

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{id} - p_F(\mathrm{id})\|^2 &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} + 2\times(-\pi) + 4\times\pi \\
&= \boxed{\frac{8\pi^3}{3} + 2\pi}
\end{aligned}$$