INTÉGRATION

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$ donc
$$1 - x^{n+1} \geq 1 - x^n \geq 0$$
et par croissance de la racine carrée sur $[0,1]$, on obtient
$$\sqrt{1-x^{n+1}} \geq \sqrt{1-x^n}$$
et donc
$$u_{n+1} = \int_0^1 \sqrt{1-x^{n+1}}dx \geq \int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx = u_n$$
La suite (u_n) est donc croissante.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on a $1 - x^n \leq 1$ donc $\sqrt{1-x^n} \leq 1$. Ainsi,
$$u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx \leq \int_0^1 1dx = 1$$
La suite (u_n) est donc majorée par 1. Étant croissante, elle converge. *Cependant, on ne peut pas dire à ce stade que la limite est 1. On peut seulement dire qu'elle converge vers une limite $\ell \leq 1$.*

3) Soit $x \in [0,1]$. Montrons que $1 - x \leq \sqrt{1-x}$. Si $x = 1$, on a égalité. Si $x \neq 1$, alors $\sqrt{1-x} > 0$ donc
$$\begin{aligned} & 1 - x \leq \sqrt{1-x} \\ \iff & \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} \leq 1 \\ \iff & \sqrt{1-x} \leq 1 \end{aligned}$$
et cette dernière inégalité est vraie, cf question 2. Maintenant, montrons que $\sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2}$. On a
$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2} \\ \iff & 1 - x \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \qquad \text{car } 1 - x \geq 0 \text{ et par croissance de } x \mapsto x^2 \\ \iff & 1 - x \leq 1 - x + \frac{x^2}{4} \\ \iff & 0 \leq \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$
Or, cette dernière égalité est vraie. D'où le résultat.

4) Par la question 3, pour tout $y \in [0,1]$
$$1 - y \leq \sqrt{1-y} \leq 1 - \frac{y}{2}$$
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Alors $x^n \in [0,1]$. En posant $y = x^n$, on en déduit que
$$1 - x^n \leq \sqrt{1-x^n} \leq 1 - \frac{x^n}{2}$$

Si bien que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-x^n)dx \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^n}dx \leq \int_0^1 \left(1-\frac{x^n}{2}\right)dx \\
\iff &1-\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq 1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \\
\iff &1-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1-\frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim u_n = 1$.

Exercice 6

1) Vu en TD.
2) Soit f en escalier sur $[a,b]$. Alors il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq m}$ de $[a,b]$ adaptée à f. On pose alors $p_i \in \mathbb{R}$ la valeur pour laquelle

$$f|_{]a_i,a_{i+1}[} \equiv p_i$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt &= \sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\sin(nt)dt \\
&= \sum_{i=0}^{m-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} p_i\sin(nt)dt \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} p_i\int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nt)dt \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} p_i\left(-\frac{1}{n}\cos(na_{i+1})+\frac{1}{n}\cos(na_i)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} p_i\left(\cos(na_i)\right)-\cos(na_{i+1}))
\end{aligned}$$

Montrons que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{m-1} p_i\left(\cos(na_i)\right)-\cos(na_{i+1}))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} |p_i\left(\cos(na_i)\right)-\cos(na_{i+1}))| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} |p_i|\,|\cos(na_i))-\cos(na_{i+1})| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} |p_i|\times[|\cos(na_i))|+|\cos(na_{i+1})|] \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} |p_i|\times 2
\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} |p_i| \times 2$ ne dépend pas de n, donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} |p_i| \times 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où le résultat pour $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt\right|$, donc pour $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(nt)dt$.

3) Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. On pose $g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| &= \left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\sin(nt)dt + \int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\leq \left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\sin(nt)dt\right| + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\leq \int_a^b |f(t)-g(t)|\cdot|\sin(nt)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\leq \int_a^b \varepsilon\,|\sin(nt)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\leq \varepsilon\int_a^b 1dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \\
&= \varepsilon(b-a) + \left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right|
\end{aligned}$$

Or, comme $|g| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, par la question 2, on sait que

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(nt)dt\right| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas,

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| \leq \varepsilon(b-a)+\varepsilon$$

Récapitulons : étant donné un $\varepsilon > 0$ quelconque, on a montré qu'il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| \leq \varepsilon\,(1+b-a)$$

Ainsi, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où le résultat.

(Cela implique que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right|$ peut, pour n assez grand, être rendu aussi petit que l'on veut : si on veut être plus petit que $\frac{1}{1000}$, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{1000(1+b-a)}$: cela signifie bien que la limite est nulle)