LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

Exercice 1. Énoncer en français la signification des assertions suivantes, et indiquer si elles sont vraies ou fausses.

1. $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x < 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^3 + 1 = 0$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad a + b$ est pair
4. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$
5. $\exists ! (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad u^2 + v^2 = 4$

Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad n$ est pair
2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = -1$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = \sqrt{x}$
4. $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad x^2 + y^2 = z^2$
6. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \implies x^2 > 4$

Exercice 3. Les propositions logiques ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? (Justifier)

- $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire avec des quantificateurs :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Exercice 5. Démontrer l'assertion $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon) \implies (x = 0)$.

Exercice 6. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 7. Soient a, b deux réels. Montrer que si l'équation $ax + b = 0$ admet une infinité de solutions, alors $a = 0$.

Exercice 8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.
2. On considère la propriété P_n : $8^n + 2$ est multiple de 7. Montrer qu'elle est héréditaire. Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 10. On dit qu'un entier $n \geq 2$ est composé s'il existe deux entiers a et b supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$. Si n n'est pas composé, il est dit premier. Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 2$ admet un nombre premier comme diviseur.

Exercice 11. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Indication : déterminer $f(0)$.

Exercice 12 ($\star$)**.** On considère un polygône régulier à n points dans le plan. On trace toutes les droites passant par deux de ces points. Combien de droites sont ainsi tracées ?

Exercice 13 ($\star$)**.** Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites passant par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.