Exercice 5 Pour D_n : le calcul est assez similaire à l'exemple du cours. On trouve la relation

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$$

Donc l'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

$r = 1$ est l'unique racine double, si bien qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D_n = A \cdot 1^n + Bn \cdot 1^n = A + nB$$

Déterminons A et B. Pour $n = 1$, on a

$$D_1 = |2| = \boxed{2 = A + B}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = \boxed{3 = A + 2B}$$

On trouve ainsi $A = B = 1$, si bien que

$$\boxed{D_n = n + 1}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & & & b \\ b & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a & b \\ b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n)} \overset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} a-b & b & b & \cdots & b & b \\ b-a & a & b & & & b \\ 0 & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \vdots & & b & a & b \\ 0 & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n)} = (a-b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b & b \\ -1 & a & b & & & b \\ 0 & b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & b \\ 0 & \vdots & & b & a & b \\ 0 & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n)}$$

En développant selon la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a-b) \times 1 \begin{vmatrix} a & b & & & b \\ b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (a-b) \times (-1) \times (-1) \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-1)} \\ &= (a-b)\Delta_{n-1} + (a-b) \begin{vmatrix} a+(b-a) & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & b \\ \vdots & & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-1)} \end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} a+(b-a) \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, par multilinéarité, on obtient :

$$\Delta_n = (a-b)\Delta_{n-1} + (a-b)\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & b \\ \vdots & & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-1)} + (a-b)\begin{vmatrix} (b-a) & b & b & \cdots & b & b \\ 0 & a & b & & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b & b \\ \vdots & \vdots & & b & a & b \\ 0 & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= (a-b)\Delta_{n-1} + (a-b)\Delta_{n-1} + (a-b)(b-a)\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & b \\ \vdots & & b & a & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

$$= 2(a-b)\Delta_{n-1} - (a-b)^2\Delta_{n-2}$$

Posons $\mu := a-b$. L'équation caractéristique est donc

$$r^2 - 2\mu r + \mu^2 = 0$$

càd $(r-\mu)^2 = 0$. Il y a une seule racine double, μ, si bien qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \boxed{\Delta_n = A\mu^n + Bn\mu^n}$$

Déterminons A et B. Pour $n = 1$, on a

$$\Delta_1 = |a| = \boxed{a = A\mu + B\mu}$$

Pour $n = 2$, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 = \boxed{(a+b)\mu = A\mu^2 + 2B\mu^2}$$

Faisons une disjonction de cas.

- Si $\mu = 0$, i.e. si $a = b$, alors la formule sur Δ_n entraine que $\Delta_n = 0$. Alternativement, $\Delta_n = 0$ car deux des colonnes (et même toutes) du déterminant sont égales.
- Si $\mu \neq 0$, i.e. si $a \neq b$, alors les équations deviennent

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{a}{\mu} \\ A + 2B = \dfrac{a+b}{\mu} \end{cases} \qquad \begin{cases} B = \dfrac{b}{\mu} = \dfrac{b}{a-b} \\ A = \dfrac{a}{\mu} - B = \dfrac{a-b}{\mu} = 1 \end{cases}$$

  ce qui entraine

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (a-b)^n + \frac{b}{a-b} n (a-b)^n \\ &= (a-b)^n + bn(a-b)^{n-1} \end{aligned}$$

Finalement, dans tous les cas, on a :

$$\boxed{\Delta_n = (a-b)^n + bn\,(a-b)^{n-1}}$$

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$$

On développe selon la première colonne :

$$\delta_n = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & b & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)} - a \times \begin{vmatrix} b & & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

On développe le second déterminant selon la première ligne :

$$\begin{aligned} \delta_n &= \delta_{n-1} - ab \times \begin{vmatrix} 1 & b & & \mathbf{0} \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ \mathbf{0} & & a & 1 \end{vmatrix}_{(n-2)} \\ &= \delta_{n-1} - ab\delta_{n-2} \end{aligned}$$

Si on est arrivé jusqu'ici, le plus important est fait. La suite demande beaucoup trop de calculs dans certains cas : on se contentera donc du cas $ab = \frac{1}{4}$ qui est encore « faisable ».

On obtient l'équation caractéristique

$$r^2 - r + ab = 0$$

Posons $\mu := ab$. Le discriminant est donc

$$\Delta = 1 - 4\mu$$

Distinguons des cas.

- Si $\mu = \frac{1}{4}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation admet une racine double $r_0 := \frac{1}{2}$, et δ_n est de la forme

  $$\delta_n = Ar_0^n + Bnr_0^n$$

  Il faut ensuite déterminer A, B à partir des valeurs $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 1 - ab = \frac{3}{4}$. Cela donne

  $$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \\ \frac{3}{4} = \frac{1}{4}A + \frac{2}{4}B \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = A + B \\ 3 = A + 2B \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

On trouve donc
$$\delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}(n+1)$$

- Si $\mu < \dfrac{1}{4}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation admet deux racines r_1, r_2, et δ_n est de la forme
$$\delta_n = Ar_1^n + Br_2^n$$
Il faut ensuite déterminer A, B à partir des valeurs $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 1 - ab$.
- Si $\mu > \dfrac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées ρ et $\overline{\rho}$. Alors δ_n est de la forme
$$\delta_n = A\rho^n + B\overline{\rho}^n$$
Il faut ensuite déterminer A, B à partir des valeurs $\delta_1 = 1$ et $\delta_2 = 1 - ab$.