Exercice 8 Si $k=0$, alors $A^k=B^k=I_n$ donc A^k et B^k sont trivialement semblables. Si $k\in\mathbb{N}^*$, alors A,B étant semblables, il existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
B^k &= (P^{-1}AP)^k \\
&= \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)}_{k \text{ fois}} \\
&= P^{-1}\underbrace{AA\dots A}_{k\text{ fois}}P \qquad \text{car } P^{-1}P=I_n \\
&= P^{-1}A^kP
\end{aligned}$$

On en déduit que B^k est semblable à A^k.

Exercice 11 **1)** Comme s est linéaire (par définition), il suffit de montrer que $s\circ s=\mathrm{id}$. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors $S=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)$. En particulier,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s\circ s)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s)=S\times S$$

Or,

$$S^2=\begin{pmatrix}-5&-6&-6\\6&7&6\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&-6&-6\\6&7&6\\-2&-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(s\circ s)=I_3=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On en déduit que $s\circ s=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, d'où le résultat.

2) Pour alléger la notation, on note id au lieu de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$. Déterminons ces espaces. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id}) &\iff s(x,y,z)-(x,y,z)=0 \\
&\iff \begin{cases}-6x-6y-6z &=0\\ 6x+6y+6z &=0\\ -2x-2y-2z &=0\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{-6}&-6&-6&0\\6&6&6&0\\-2&-2&-2&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{-6}&-6&-6&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\L_2+L_1\\L_3-\frac{1}{3}L_1\end{array}$$

Donc

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})\iff -6x-6y-6z=0\iff x=-y-z$$

Finalement

$$\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x=-y-z\right\}$$

Pour $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(s-\mathrm{id}) &\iff s(x,y,z)+(x,y,z)=0 \\
&\iff \begin{cases} -4x-6y-6z &= 0 \\ 6x+8y+6z &= 0 \\ -2x-2y &= 0 \end{cases} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -6 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2-2L_1 \\ L_3+3L_1 \end{array} \\
& \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-2} & 0 & 6 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1-L_2 \\ \\ L_3+L_2 \end{array}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}) \iff \begin{cases} -2x+6z=0 \\ -2y-6z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3z \\ y=-3z \end{cases}
$$

Finalement,

$$
\operatorname{Ker}(s+\mathrm{id}) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=3z=-y\right\}
$$

3) *L'idée de cette question repose sur le fait que, pour tout vecteur $u \in Ker(s-id)$, on a $s(u)=u$, et de même si $v \in Ker(s+id)$, on a $s(v)=-v$. Si on peut trouver une base adaptée à ces s.e.v., la matrice obtenue sera alors particulièrement simple, comme pour les projecteurs avec $Ker\, p$ et $Ker(p-id)$.*

Comme s est une symétrie, on a $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(s-\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(s+\mathrm{id})$. On va prendre pour $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. On cherche donc une base de chacun de ces s.e.v.

On a

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id}) &= \{(-y-z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1,1,0)+z(-1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

On constate que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id})$. C'est une famille libre car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, c'est une base de $\operatorname{Ker}(s-\mathrm{id})$.

De plus,

$$\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id}) = \{(3z,-3z,z) \mid z\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$$

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$. De plus c'est une famille libre car son unique vecteur est non nul. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$.

À présent, on concatène les bases de $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$, en posant

$$\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3) := \left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)$$

Comme les s.e.v. $\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$ sont supplémentaires, $\mathcal{B}$ est une base de E.

Déterminons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$. Comme $e_1,e_2\in\mathrm{Ker}\,(s-\mathrm{id})$, on a

$$s(e_1)=e_1 \qquad\qquad s(e_2)=e_2$$

Comme $e_3\in\mathrm{Ker}\,(s+\mathrm{id})$, on a

$$s(e_3)=-e_3$$

Finalement,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Note : si on avait inversé l'ordre des vecteurs de la base, par exemple avec $\mathcal{B}'=(e_3,e_1,e_2)$, on trouverait

$$Mat_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Il y avait donc plusieurs réponses possibles. Est correcte toute matrice diagonale *avec deux 1 et un -1 sur la diagonale.*