Exercice 1 On ne donne que les solutions, pas le détail de la preuve.

4) Vrai

5) Vrai

6) Vrai

7) Vrai

8) Faux : on peut par exemple voir que $\varphi(-f) = \varphi(f)$ et donc $\varphi(-f) \neq -\varphi(f)$ en général. On peut par exemple prendre $f = \text{id}$.

Exercice 8

- Montrons que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. Soit $x \in \text{Ker } f$. Alors $f(x) = 0_E$, donc

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(0_E) = 0_E \qquad \text{car } f \text{ est linéaire}$$

  Ainsi, $x \in \text{Ker } f^2$. D'où le résultat.

- Montrons que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$. Soit $y \in \text{Im } f^2$. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = f^2(x) = f\left(f(x)\right)$$

  En posant $x' = f(x) \in E$, on a donc $y = f(x')$. On en déduit que $y \in \text{Im } f$. D'où le résultat.

- Montrons la première équivalence.
  - Sens réciproque : supposons $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$. Montrons que $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Par ce qui précède, on a déjà $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. Il suffit donc de montrer que $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$. Soit donc $x \in \text{Ker } f^2$. On a

$$f^2(x) = f\left(f(x)\right) = 0$$

    Ainsi, en posant $y = f(x)$, on a d'une part $y \in \text{Ker } f$. D'autre part, comme $y = f(x)$, on a $y \in \text{Im } f$. Ainsi, $y \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ par hypothèse. D'où $y = 0$. On en déduit que $f(x) = 0$, càd $x \in \text{Ker } f$. Par arbitraire sur x, $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$.

  - Sens direct : supposons $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$. Soit $y \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. On a $y \in \text{Im } f$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. De plus, $y \in \text{Ker } f$ donc

$$f(y) = f(f(x)) = 0$$

    Ainsi, $x \in \text{Ker } f^2$. Or, $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$ donc $x \in \text{Ker } f$. Finalement, $f(x) = 0$ donc $y = 0$. Par arbitraire sur y, on a $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

- Montrons la seconde équivalence.
  - Sens réciproque : supposons $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$. Montrons que $\text{Im } f = \text{Im } f^2$. Par ce qui précède, on a déjà $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$. Il suffit donc de montrer que $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$. Soit donc $y \in \text{Im } f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, comme $x \in E = \text{Ker } f + \text{Im } f$,

$$\text{il existe } x_K \in \text{Ker } f \text{ et } x_I \in \text{Im } f \text{ tels que } x = x_K + x_I$$

    Ainsi, comme f est linéaire,

$$f(x) = f(x_K + x_I) = f(x_K) + f(x_I) = 0_E + f(x_I) = f(x_I)$$

On en déduit que $y = f(x) = f(x_I)$. Or, comme $x_I \in \operatorname{Im} f$, il existe $z \in E$ tel que $x_I = f(z)$. Ainsi,

$$y = f(x_I) = f(f(z)) = f^2(z)$$

donc $y \in \operatorname{Im} f^2$. Par arbitraire sur y, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$.

– Sens direct : supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Montrons que $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$. Une inclusion est évidente. Montrons alors que $E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Soit $x \in E$. Étant donné $z \in E$, on peut écrire

$$x = x - z + z$$

On cherche alors z tel que $x - z \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} f$. Ainsi, cela revient à montrer que

$$\exists z \in \operatorname{Im} f \qquad x - z \in \operatorname{Ker} f$$

Or, $z \in \operatorname{Im} f$ si et seulement s'il existe $x' \in E$ tel que $z = f(x')$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \exists z \in \operatorname{Im} f \qquad x - z \in \operatorname{Ker} f \\
\iff & \exists x' \in E \qquad x - f(x') \in \operatorname{Ker} f \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x - f(x')) = 0 \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x) - f^2(x') = 0 \\
\iff & \exists x' \in E \qquad f(x) = f^2(x') \\
\iff & f(x) \in \operatorname{Im} f^2
\end{aligned}$$

Or, $f(x) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, donc la dernière assertion ci-dessus est vraie. Finalement, en posant $x' \in E$ tel que $f(x) = f^2(x')$, on a

$$x = \underbrace{x - f(x')}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f(x')}_{\in \operatorname{Im} f}$$

D'où $x \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Par arbitraire sur x, $E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. D'où le résultat.

Exercice 11

1) Vu en TD.
2) Montrons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$. Ici, on peut raisonner par équivalences. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker} q & \iff q(x) = 0 \\
& \iff (\mathrm{id}_E - p)(x) = 0 \\
& \iff x - p(x) = 0 \\
& \iff p(x) = x \\
& \iff x \in \operatorname{Im} p \qquad \text{car } p \text{ est un projecteur}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. Montrons maintenant que $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$. Par la question 1), comme p est un projecteur, q aussi. Comme on a également $p = \mathrm{id}_E - q$, on peut échanger les rôles de p et q dans le raisonnement ci-dessus. Ainsi, $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Exercice 12

Attention, il y a une erreur d'énoncé sur la deuxième assertion. Elle est corrigée sur la version en ligne du TD.

Première assertion, sens réciproque : montrons que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$. Soit donc $x \in \operatorname{Ker} p$. Alors

$$q(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$$

d'où $x \in \operatorname{Ker} q$. D'où le résultat.

Première assertion, sens direct : on suppose $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $p \circ q = p$. Soit $x \in E$. Comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, on peut écrire

$$x = x_K + x_I \qquad \text{avec } x_K \in \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad x_I \in \operatorname{Im} q$$

Alors

$$\begin{aligned}(p \circ q)(x) &= p(q(x_K + x_I)) \\ &= p(x_I)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}p(x) &= p(x_K + x_I) \\ &= p(x_K) + p(x_I) \\ &= 0 + p(x_I) \qquad\qquad \text{car } x_K \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p\end{aligned}$$

D'où $p(x) = p \circ q(x)$.

Deuxième assertion, sens réciproque : montrons que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$. Soit donc $y \in \operatorname{Im} p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Dans ce cas,

$$y = p(x) = (q \circ p)(x) = q(p(x))$$

donc $y \in \operatorname{Im} q$. D'où le résultat.

Deuxième assertion, sens direct : on suppose $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$. Comme p, q jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que $p \circ q = q$. Soit donc $y \in E$. Comme $E = \operatorname{Ker} q \oplus \operatorname{Im} q$, on peut écrire

$$y = y_K + y_I \qquad \text{avec } y_K \in \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad y_I \in \operatorname{Im} q$$

Alors d'une part,

$$q(y) = y_I$$

et d'autre part,

$$(p \circ q)(y) = p(q(y_K + y_I)) = p(y_I)$$

Or, $y_I \in \operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p$, donc $p(y_I) = y_I$. Ainsi

$$(p \circ q)(y) = y_I$$

Par arbitraire sur y, on a donc $p \circ q = q$.