ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Exercice 17

1. Comme $x-1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1 \neq 0$, on a

$$x-1 \underset{x\to 0}{\sim} -1$$

De même,

$$\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

Ainsi, par produit et quotient d'équivalents

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x\times 1}{-1} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x}$$

On en déduit que $f(x) < 0$ localement à droite de zéro, et que $f(x) > 0$ localement à gauche de zéro

2. Comme $x\sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x\to 1]{} \sqrt{2} \neq 0$, on a $x\sqrt{x^2+1} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2}$. Alors, par quotient d'équivalents,

$$f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{x-1}$$

On ne peut pas aller plus loin : certes il reste un signe $-$, mais ce signe disparait si on se ramène à un équivalent en 0 : si on pose $x = 1+h$, alors $f(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{h}$

3. On a d'une part $x-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, et d'autre part pour tout $x>0$

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\times 1$$

Donc par quotient d'équivalents,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\times x}{x} = x$$

Comme $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

4. Soit $x>1$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

On pose $u = \dfrac{1}{x}$, de sorte que $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{1+u^2}}{1-u}$, puis on pose

$$F(u) := \frac{\sqrt{1+u^2}}{1-u} = \frac{f(x)}{x}$$

Cherchons un $DL_2(0)$ de F :

$$\begin{aligned}
F(u) &= \frac{1}{1-u} \times \sqrt{1+u^2} \\
&\underset{u\to 0}{=} \left(1+u+u^2+o(u^2)\right)\left(1+\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\right) \\
&\underset{u\to 0}{=} \left(1+\frac{1}{2}u^2\right)+u+u^2+o(u^2) \\
&\underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{3}{2}u^2+o(u^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $u = \frac{1}{x}$ et $F(u) = \frac{f(x)}{x}$,

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, C_f admet pour asymptote oblique $y = x+1$, et comme

$$f(x)-(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

on en déduit que $f(x)-(x+1) > 0$ au voisinage de $+\infty$. Finalement, C_f est au-dessus de son asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 18

Le corrigé du **(d)** est plus bas.

(e) On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Pour avoir l'équation de la tangente en 1, on cherche un DL_1 de f en 1, mais on doit avoir un terme non nul supplémentaire pour avoir la position relative, donc (on espère que l'ordre 2 suffise) un $DL_2(1)$.

Pour avoir un $DL_2(1)$, on pose $x = 1+h$:

$$f(1+h) = \frac{\ln(1+h)}{h}+\frac{1+h}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\ln(1+h)}{h}+\frac{h}{2}$$

et on cherche un $DL_2(0)$ de $f(1+h)$: il faut un $DL_3(0)$ de $\ln(1+h)$ à cause du $\dfrac{1}{h}$ en facteur

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= \frac{\ln(1+h)}{h} + \frac{h}{2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{h} + \frac{h}{2} \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right) + \frac{h}{2} \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{h^2}{3} + o(h^2)
\end{aligned}$$

Pour obtenir le $DL_2(1)$ de f, on repasse en variable x avec $h = x-1$:

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 \cancel{+0\times(x-1)} + \frac{(x-1)^2}{3} + o\left((x-1)^2\right)$$

On voit donc que l'équation de la tangente est $y = 1\cancel{+0(x-1)}$. Le terme $\dfrac{(x-1)^2}{3}$ étant positif, C_f est (au voisinage de 1) au-dessus de sa tangente en 1.

En particulier, $f(x) - f(1) = f(x) - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{(x-1)^2}{3}$, donc $f(x) - f(1) \geq 0$ au voisinage de 1. Ainsi, 1 est un minimum local de f.

(d) On pose $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}$. On cherche un DL de f en 1, donc on pose $x = 1+h$ et on cherche un DL de $h \mapsto f(1+h)$ en 0 :

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= 1+h+2\sqrt{1+h} - \sqrt{4+h} \\
&\underset{h\to 0}{=} 1+h+2\sqrt{1+h} - 2\sqrt{1+\frac{h}{4}} \\
&\underset{h\to 0}{=} 1+h+2\left(1+\frac{h}{2} - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)\right) - 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{4}\right)^2 + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1+h+2+h-\frac{1}{4}h^2 - 2 - \frac{h}{4} + \frac{1}{64}h^2 + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + \frac{7}{4}h - \frac{15}{64}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, f admet le $DL_2(1)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

Ainsi, la tangente à C_f en 1 est

$$y = 1 + \frac{7}{4}(x-1) = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}$$

De plus,

$$f(x) - \left(1 + \frac{7}{4}(x-1)\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{15}{64}(x-1)^2$$

donc au voisinage de 1, C_f est en-dessous de sa tangente.

Enfin, l'équation de la tangente entraine que $f'(1) = \dfrac{7}{4} \neq 0$. Ainsi 1 n'est pas un point critique, et donc (puisque c'est un point intérieur de $D_f = \mathbb{R}_+$) f n'admet pas d'extremum local en 1.

Exercice 22 (modifié, cf TD 13 en ligne)

(a) On a immédiatement que $D_f = \mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe C^∞ par somme de telles fonctions. Pour tout $x \in D_f$,
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$
Ainsi, f est strictement croissante. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $D_f = \mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*)$. Il reste à montrer que $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. Tout d'abord, par somme de limites,
$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
Le tableau de variations de f est donc

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

(b) L'équation se réécrit $f(x) = n$. Par la question précédente, f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Or, comme $n \in \mathbb{R}$, il existe donc une unique solution $x_n = f^{-1}(n) \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) D'une part, $x_n = f^{-1}(n)$. D'autre part, par le théorème de la bijection, f^{-1} est strictement croissante puisque f l'est. Ainsi, x_n est (strictement) croissante.

Comme (x_n) est croissante, il suffit de montrer qu'elle est non majorée pour en déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Supposons par l'absurde que (x_n) est majorée. Alors elle converge vers une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi,
$$n = x_n + \ln x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ln \ell$$
et donc $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ln \ell$. Contradiction. Donc (x_n) est non majorée, et tend vers $+\infty$.

(d) On sait que $\ln x \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$. Or, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc par composition à droite
$$\ln x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(x_n)$$
On en déduit que $n = x_n + \ln x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$.

(e) Par la question précédente, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n + o(n)$.

(f) Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n + o(n)$, on a
$$\begin{aligned}
x_n &= n - \ln x_n \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n + o(n)) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n - \ln[n(1 + o(1))] \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n - \ln n - \ln(1 + o(1))
\end{aligned}$$

Or, $1+o(1)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, donc $\ln(1+o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Finalement

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n+o(1)$$

(g) Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n+o(1)$, on a

$$\begin{aligned} x_n &= n-\ln x_n \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln(n-\ln n+o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln\left[n\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n-\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x+o(x)$, on obtient par composition à droite

$$\begin{aligned} \ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \end{aligned}$$

En effet, $\frac{\ln n}{n}$ « l'emporte » sur $\frac{1}{n}$ car il tend moins vite vers zéro. Plus rigoureusement :

$$\begin{aligned} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\ln n}{n}\varepsilon_1(n)+\frac{1}{n}\varepsilon_2(n) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_1(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \varepsilon_2(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases} \\ &= \frac{\ln n}{n}\underbrace{\left(\varepsilon_1(n)+\frac{1}{n\ln n}\varepsilon_2(n)\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \\ &= o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} x_n &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n-\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n-\left(-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n-\ln n+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \end{aligned}$$