Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1

2) Pour le polynôme Q, on doit trouver que le degré est $2n$, le coefficient dominant est $(-1)^n$, et le terme constant est nul si $n \geq 1$, ou 1 si $n = 0$.

Exercice 2

4) Il faut faire une analyse-synthèse. Pour l'analyse, on suppose que P est solution. On distingue deux cas :

- Si P est constant, alors $P = \lambda \in \mathbb{K}$. Dans ce cas $P \circ P = \lambda = P$. Ainsi, tout polynôme constant est solution (on pourra le redire à la synthèse).
- Si $\deg P \geq 1$, alors $\deg(P \circ P) = \deg P$, i.e. $\deg P \times \deg P = \deg P$: on en déduit que $\deg P = 1$. On peut s'arrêter là pour l'analyse.

Synthèse : les polynômes constants sont bien solution. Vérifions si les polynômes de degré 1 le sont. On pose $P = aX + b$ avec $a \neq 0$. Alors

$$P \circ P = a(aX + b) + b = a^2 X + ab + b$$

On voit que

$$P \circ P = P \iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \quad (\text{car } a \neq 0) \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $P = X$ est la seule possibilité. Finalement

$$\mathcal{S} = \{X\} \cup \mathbb{K}_0[X]$$

Exercice 7

2) Soit (Q, R) le couple associé à la division euclidienne de P par $(X-a)^2$. Alors

$$P = (X-a)^2 Q + R \qquad \deg R < \deg(X-a)^2 = 2$$

Ainsi, $\deg R \leq 1$ donc $R = \lambda X + \mu$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dans ce cas,

$$P = (X-a)^2 Q + (\lambda X + \mu)$$

En évaluant en a, on trouve $\boxed{P(a) = \lambda a + \mu}$. Pour avoir une autre équation, on dérive les polynômes ci-dessus :

$$P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q' + \lambda$$

et en évaluant en a on obtient alors $\boxed{P'(a) = \lambda}$. D'où

$$\boxed{\mu = P(a) - aP'(a)}$$

Exercice 10

L'énoncé de l'exercice a été mis à jour sur la version en ligne.

1) Il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mq$. Alors

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{mq} - 1 \\ &= (X^m)^q - 1^q \\ &= (X^m - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (X^m)^k 1^{q-k-1} \\ &= (X^m - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^{mk} \end{aligned}$$

On en déduit que $X^m - 1 \mid X^n - 1$.

2) On fait la division euclidienne de n par m : il existe q, r tels que $n = mq + r$ et $0 \leq r < m$. Alors

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{mq+r} - 1 \\ &= X^{mq}X^r - 1 \\ &= X^{mq}X^r - X^r + X^r - 1 \\ &= (X^{mq} - 1)X^r + X^r - 1 \\ &= (X^m - 1)X^r \sum_{k=0}^{q-1} X^{mk} + X^r - 1 \end{aligned}$$

Il s'agit de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$ car $\deg(X^r - 1) = r < m = \deg(X^m - 1)$.

3) Si on fait l'algorithme d'Euclide pour n et m, on obtiendrait

$$\begin{aligned} n &= mq_1 + r_1 \\ m &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + 0 \end{aligned}$$

et si $r_{n-1} \neq 0$ on en déduit que $m \wedge n = r_{n-1}$. Par la question 2), l'algorithme d'Euclide appliqué à $X^n - 1$ et $X^m - 1$ donne alors :

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= (X^m - 1)Q_1 + X^{r_1} - 1 \\ X^m - 1 &= (X^{r_1} - 1)Q_2 + X^{r_2} - 1 \\ X^{r_1} - 1 &= (X^{r_2} - 1)Q_3 + X^{r_3} - 1 \\ &\vdots \\ X^{r_{n-2}} - 1 &= (X^{r_{n-1}} - 1)Q_n + 0 \end{aligned}$$

si bien que le dernier reste non nul est $X^{r_{n-1}} - 1$. Ainsi,

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{r_{n-1}} - 1 = X^{m \wedge n} - 1$$

Exercice 13

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (sans plus de précision, la racine peut a priori être complexe). Alors α est une racine double de P si et seulement si

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \\ P''(\alpha) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha + m = 0 \\ 3\alpha^2 - 6 = 0 \\ 6\alpha \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 = 2 \\ (\alpha^2 - 6)\alpha + m = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4\alpha + m = 0 \\ \alpha^2 = 2 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m = 4\alpha \\ \alpha^2 = 2 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Comme $\alpha^2 = 2$, on a $\alpha \in \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$. Or, puisque $m > 0$ par hypothèse, on déduit que $4\alpha > 0$. Ainsi $\alpha = \sqrt{2}$ et par suite $\boxed{m = 4\sqrt{2}}$.

Comme $\sqrt{2}$ est racine double, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = X^3 - 6X + 4\sqrt{2} = (X - \sqrt{2})^2 Q$$

L'autre racine de P est ainsi la racine de Q. Comme, $\deg Q = 1$, on a $Q = aX + b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$P = X^3 - 6X + 4\sqrt{2} = (X - \sqrt{2})^2 (aX + b)$$

En identifiant on trouve $1 = a$ et $4\sqrt{2} = 2b$, ainsi $Q = X + 2\sqrt{2}$. L'autre racine de P est ainsi la racine de Q, à savoir $-2\sqrt{2}$.

Exercice 21

1) P est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points

$$(x_1, y_1) := (1, 2) \qquad (x_2, y_2) := (2, 3) \qquad (x_3, y_3) := (3, 6)$$

(Étape 1 : on construit les polynômes L_1, L_2, L_3, qui ne dépendent que de x_1, x_2, x_3)
On pose

$$L_1 := \prod_{k=2}^{3} \frac{X - x_k}{x_1 - x_k} = \frac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$$

$$L_2 := \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^{3} \frac{X - x_k}{x_2 - x_k} = \frac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)} = -(X-1)(X-3)$$

$$L_3 := \prod_{k=1}^{2} \frac{X - x_k}{x_3 - x_k} = \frac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$$

Ainsi, le polynôme P est donné par :

$$\begin{aligned} P &= y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 \\ &= 2L_1 + 3L_2 + 6L_3 \\ &= (X-2)(X-3) - 3(X-1)(X-3) + 3(X-1)(X-2) \\ &= (\ldots) \\ &= X^2 - 2X + 3 \end{aligned}$$

(On peut vérifier qu'on a bien $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.)

2) Les points x_1, x_2, x_3 n'ont pas changé, donc les polynômes L_1, L_2, L_3 sont identiques à la question précédente. On a donc directement

$$\begin{aligned} P &= aL_1 + bL_2 + cL_3 \\ &= \frac{a}{2}(X-2)(X-3) - b(X-1)(X-3) + \frac{c}{2}(X-1)(X-2) \\ &= \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)X^2 + \left(-5\frac{a}{2} + 4b - 3\frac{c}{2}\right)X + (3a - 3b + c) \end{aligned}$$