STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Exercice 4

1) Vu en classe : $*$ est une l.c.i. et admet 0 comme élément neutre. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifions si a admet un symétrique pour $*$. Si un symétrique x existe, il doit alors vérifier :

$$a * x = 0$$

Résolvons cette équation. Elle équivaut à

$$\begin{aligned} & a + x - ax = 0 \\ \iff & a = (a-1)x \end{aligned}$$

Si $a \neq 1$, alors $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{a}{a-1} \right\}$. Si $a = 1$, on obtient $1 = 0x = 0$. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$. Cela nous amène à la conclusion que 1 n'est pas symétrisable pour $*$, donc $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe.

2) Par la question précédente, on va vérifier que $z = 1$ convient. Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a vu que

$$a * \left(\frac{a}{a-1} \right) = 0$$

La loi $*$ étant clairement commutative, on a aussi $\left(\dfrac{a}{a-1} \right) * a = 0$. Pour conclure que a est symétrisable, <u>il faut vérifier que $\dfrac{a}{a-1}$ appartienne bien à</u> $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Supposons par l'absurde que $\dfrac{a}{a-1} = 1$. Alors on aurait $a = a - 1$, donc $0 = -1$, contradiction. Ainsi, tout élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ est symétrisable pour $*$.

Enfin, vérifions que $*$ est associative : pour tous $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - ab) * c \\ &= a + b - ab + c - (a + b - ab)c \\ &= a + b + c - ab - ac - bc + abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c * (a * b) &= c * (a + b - ab) \\ &= c + a + b - ab - c(a + b - ab) \\ &= a + b + c - ab - ca - cb + cab \end{aligned}$$

Il y a donc bien égalité entre ces deux termes car $+$ et $\times$ sont commutatives sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Ainsi, $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, *)$ est un groupe.

Exercice 7

L'énoncé a été corrigé sur la version en ligne.

On ne donne que les éléments neutres et le symétrique de chaque élément. Voir les réponses page suivante :

On donne directement les solutions. Une bonne rédaction nécessite plus de justification.

Pour T, l'élément neutre est $t_0 = \mathrm{id}$: pour tout $a \in \mathbb{C}$,

$$t_0 \circ t_a = t_a \circ t_0 = t_a$$

et de plus l'élément symétrique de t_a est t_{-a} :

$$t_a \circ t_{-a} = t_{-a} \circ t_a$$

Pour S, l'élément neutre est $\sigma_{1,0} = \mathrm{id}$: pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$,

$$\sigma_{1,0} \circ \sigma_{a,b} = \sigma_{a,b} \circ \sigma_{1,0} = \sigma_{a,b}$$

et de plus l'élément symétrique de $\sigma_{a,b}$ est $\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}}$:

$$\sigma_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} \circ \sigma_{a,b} = \sigma_{a,b} \circ \sigma_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}} = \sigma_{1,0}$$