INTERROGATION N°8 – PROBABILITÉS – CORRECTION

NOM : .... Prénom : .... Note :

Variables aléatoires

1. **(2pts) On considère l'univers $U = \{0, 1, 2\}$. Quels sont les événements de U ?**

Un événement de U est un sous-ensemble de U. Les événements de U sont donc :

$$\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$$

2. **(2pts) Donner un exemple d'une probabilité f sur U qui ne soit pas la probabilité uniforme. On ne donnera que les valeurs de $f(\{\omega\})$ pour $\omega \in U$.**

Il suffit que $f(\{\omega\})_{\omega \in U}$ soit une densité de probabilités sur U, qui ne soit pas celle de la probabilité uniforme. On peut choisir

$$f(\{0\}) = \frac{1}{4} \qquad f(\{1\}) = \frac{1}{2} \qquad f(\{2\}) = \frac{1}{4}$$

(on a alors $f = \mathbb{P}_X$ où $X \sim \mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$)

3. **(3pts) Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Donner les trois lois usuelles en précisant, pour chaque loi, l'ensemble des valeurs prises par la v.a., la loi proprement dite et enfin la notation associée.**

- Loi uniforme : soit E un ensemble non vide. X suit une loi uniforme sur E si X prend ses valeurs dans E et si $\forall x \in E \qquad \mathbb{P}(X = x) = \dfrac{1}{\text{card}(E)}$. On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.
- Loi de Bernoulli : soit $p \in [0, 1]$. X suit une loi de Bernoulli si X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ et si $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$. On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.
- Loi binomiale : soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) si X prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et si $\forall x \in k \in [\![0, n]\!] \qquad \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

4. **(3pts) On tire, *avec remise*, 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.**
   (a) **Donner un univers Ω qui correspond à cette expérience aléatoire.**

   Il faut pouvoir dissocier chaque tirage (avec remise) de 5 cartes parmi 52 cartes. En numérotant les cartes de 1 à 52, l'ensemble $[\![1, 52]\!]$ permet de dissocier un tirage. Faire 5 tirages revient donc à se donner un 5-uplet de $[\![1, 52]\!]$, donc $\Omega = [\![1, 52]\!]^5$.

   (b) **On note X la v.a. égale au nombre total de dames tirées. Reconnaitre la loi de X.**

   X est à valeurs dans $[\![0, 5]\!]$ et compte le nombre de succès après 5 tirages indépendants (et dans des conditions identiques). La probabilité de succès d'un tirage est de $\dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$, donc $X \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{13})$.

Indépendance, conditionnement

1. **(2pts) Énoncer la formule de Bayes.**

Soit A, B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

2. **(2pts) On lance un dé à six faces. On note A l'événement « le nombre obtenu est premier » et B l'événement « le nombre obtenu est un multiple de 2 ou de 3 ». Calculer $\mathbb{P}(A \mid B)$.**

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, on a $\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Or, en prenant pour univers $\Omega = [\![1,6]\!]$, on a $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{2,3,4,6\}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$. De plus $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2,3\}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Donc

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

3. **(3pts) On considère la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\Omega = [\![1,8]\!]$, ainsi que $A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{5, \alpha\}$ avec $\alpha \in \Omega \setminus \{5\}$. Est-ce que A, B sont indépendants si $\alpha \leq 4$? Si $\alpha \geq 6$?**

A, B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

- Si $\alpha \leq 4$, alors $A \cap B = \{\alpha\}$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\mathrm{card}(A \cap B)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \dfrac{1}{8}$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc A, B sont indépendants.
- Si $\alpha \geq 6$, alors $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{0}{8} = 0$. Par ailleurs, on a toujours $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ donc A, B ne sont pas indépendants.

4. **(3pts) On considère X, Y deux v.a. indépendantes dont les lois sont données par (avec $p, q \in [0,1]$) :**

$$\mathbb{P}(X = -i) = p \qquad \mathbb{P}(X = i) = 1 - p$$

$$\mathbb{P}(Y = -1) = q \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - q$$

Déterminer la loi conjointe de (X, Y). On pourra la présenter sous forme d'un tableau.

Comme X, Y sont indépendantes, on a pour tous x, y pour lesquels cela a un sens :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

On peut ainsi obtenir le tableau suivant

$\mathbb{P}_{(X,Y)}$	$X = -i$	$X = i$
$Y = -1$	pq	$(1-p)q$
$Y = 1$	$(1-q)p$	$(1-p)(1-q)$