INTERROGATION N°6 – POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Énoncer la formule du degré de $P+Q$.

$$\deg(P+Q)\begin{cases}\leq \max(\deg P, \deg Q) \\ = \max(\deg P, \deg Q) \quad \text{si } \deg P \neq \deg Q\end{cases}$$

2) Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

Cf cours.

3) Factoriser le polynôme X^3-1 dans $\mathbb{C}[X]$. (On pouvait faire comme dans le cours, sinon on peut aussi factoriser :)

1 est racine évidente, donc on factorise X^3-1 par $X-1$:

$$X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$$

Le discriminant de X^2+X+1 est $\Delta=1-4=-3<0$. Il y a donc deux racines complexes conjuguées :

$$r=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \bar{r}$$

Finalement $X^2+X+1=(X-r)(X-\bar{r})$, si bien que

$$X^3-1=(X-1)(X-r)(X-\bar{r})$$

(le r en question est en fait le complexe $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$)

4) Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{X}{(X+1)^2(X-1)}$ dans $\mathbb{R}[X]$. La forme de la décomposition est

$$\frac{X}{(X+1)^2(X-1)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{(X+1)^2}+\frac{c}{X-1}$$

le calcul donne $\boxed{b=\frac{1}{2}}$, $\boxed{c=\frac{1}{4}}$ et $\boxed{a=-\frac{1}{4}}$.