INTERROGATION N°4 – CORRIGÉ

Sujet A

1) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de « (u_n) est croissante à partir d'un certain rang » avec des quantificateurs.

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_{n+1} \geq u_n$$

2) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de « (u_n) est convergente » avec des quantificateurs.

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

3) Donner la définition de « (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes », ainsi que le théorème sur les suites adjacentes.

(u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes si l'une d'elles est croissante, l'autre est décroissante et leur différence tend vers 0.
Dans ce cas, elles convergent vers la même limite.

4) Déterminer, en justifiant, la nature de la suite de terme général $u_n = (-2)^n$.

Supposons par l'absurde que (u_n) est convergente. Alors toute sous-suite de (u_n) converge vers la même limite. En particulier, (u_{2n}) converge. Or,

$$u_{2n} = (-2)^{2n} = 4^n \to +\infty$$

Contradiction. Donc (u_n) est divergente. *Cela suffit de dire qu'elle est divergente car on demande juste la nature de* (u_n).

Sujet B

1) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de « (u_n) tend vers $+\infty$ » avec des quantificateurs.

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \geq A$$

2) Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition de « (u_n) est non majorée » avec des quantificateurs.

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad u_N \geq M$$

3) Donner la définition de « (v_n) est une suite extraite de (u_n) », ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass.

(v_n) est une suite extraite de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (dite extractrice) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

4) Déterminer, en justifiant, la nature de la suite de terme général $u_n = \arctan(v_n)$, où (v_n) est une suite réelle croissante.

Montrons que (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

- $u_n = \arctan v_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ donc (u_n) est majorée.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \arctan(v_{n+1}) - \arctan(v_n)$$

Or, $v_{n+1} \geq v_n$ et comme arctan est croissante, on a $\arctan(v_{n+1}) \geq \arctan(v_n)$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante.

Donc (u_n) est convergente.