INTERROGATION N°2 – COMPLEXES

1) Énoncer les formules d'Euler.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = a$.

<u>Si $a \neq 0$</u>, soient $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = re^{i\theta}$. Dans ce cas

$$z^n = a = re^{i\theta} \iff \left(\exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)$$

$$S = \left\{ r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

<u>Si $a = 0$</u>, alors $z^n = 0 \iff |z^n| = 0 \iff |z|^n = 0 \iff |z| = 0 \iff z = 0$. Donc l'équation admet pour unique solution $z = 0$.
(Si vous aviez juste exclu le cas $a = 0$ sans le traiter, vous aviez quand même tous les points)

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} u+v = -2i \\ uv = 3 \end{cases}$

u, v sont les racines du trinôme $z^2 + 2iz + 3$. Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = (-2i)^2 - 4 \times 3 = -4 - 12 = -16 = 16i^2$$

dont les racines carrées sont $4i$ et $-4i$. Ainsi, les racines du trinôme sont

$$z_1 = \frac{-2i-4i}{2} = -3i \qquad z_2 = \frac{-2i+4i}{2} = i$$

On en déduit que $(u, v) = (-3i, i)$ ou $(u, v) = (i, -3i)$ sont les seules solutions du système.