INTERROGATION N°1 – LOGIQUE

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) En raisonnant par contraposée, démontrer $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x^2+6x+1 \leq 0 \implies x<0\right)$.

En prenant la contraposée de l'implication, cette assertion équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x \geq 0 \implies x^2+6x+1>0\right)$$

Montrons cette dernière proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $x \geq 0$. Alors $x^2 \geq 0$ et $6x \geq 0$, si bien que

$$x^2+6x+1 \geq 1 > 0$$

d'où le résultat.

2) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on pose $P(f) : \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-x_0| \leq \delta \implies |f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Écrire la négation de $P(f)$.

$$\boxed{\text{non}P(f) : \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |x-x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x)-f(x_0)| > \varepsilon}$$

(on rappelle que « $\text{non}(P \implies Q)$ » équivaut à « P et non$Q$ »)

3) On pose $R : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 < 0 \implies x < 0)$. La proposition R est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 \geq 0$. On en déduit que l'assertion $x^2<0$ est toujours fausse. De ce fait, l'implication $x^2 < 0 \implies x<0$ est toujours vraie. Ainsi, $\boxed{R \text{ est vraie}}$.

4) Écrire avec des quantificateurs la proposition suivante : « aucun entier n'est supérieur à tous les autres ».

La négation de cette proposition est « il existe un entier supérieur à tous les autres », c'est-à-dire

$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad n \geq m$$

Ainsi, on peut obtenir la proposition de départ en prenant la négation de cette dernière proposition :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists m \in \mathbb{Z} \quad n < m}$$

(On notera que « entier » sans précision signifie entier relatif, donc dans $\mathbb{Z}$. Par ailleurs, « supérieur » sans précision signifie supérieur ou égal, donc $\geq$)