EXERCICES DE LA BANQUE CCINP

Lorsque “mod” apparait à côté du numéro de l’exercice, cela signifie qu’une ou plusieurs questions ont été modifiées pour le rendre faisable en MPSI.

Exercice 59-mod

Soit E l’espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. Soit f l’endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   a) sans utiliser de matrice de f,
   b) en utilisant une matrice de f.
2) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

Exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l’endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2) f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4) A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 62-mod

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1) Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$:
3) Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 64

Soit f un endomorphisme d’un espace vectoriel E de dimension n.

1) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2) a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice 71 Soit p, la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d’équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d’équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

POUR LE PLAISIR

Soit E un espace vectoriel de dimension finie notée n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Donner 18 caractérisations de l’assertion “f est inversible dans $\mathscr{L}(E)$”.

EXERCICES PLUS DIFFICILES

Ex A

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1) Montrer qu'il existe un $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
2) Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que g commute avec f si et seulement si $g \in \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.

Ex B

Soit $E_0, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à $a_0, \dots, a_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, \dots, f_{n-1}$ telles que :

1) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1})$.
2) f_0 est injective.
3) Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, on a $\operatorname{Im}(f_k) = \operatorname{Ker}(f_{k+1})$.
4) f_{n-1} est surjective.

Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.