DS n°8 : corrigé

Exercice 1 : Polynômes et fractions rationnelles

1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^3}{X^3+3X^2-4}$ dans $\mathbb{C}$. **(/5,5)**

On détermine d'abord la partie entière : comme

$$X^3 = 1 \times (X^3+3X^2-4) + (-3X^2+4)$$

on a immédiatement

$$\frac{X^3}{X^3+3X^2-4} = 1 + \frac{-3X^2+4}{X^3+3X^2-4}$$

On factorise le dénominateur. On remarque que 1 est racine évidente, donc

$$X^3+3X^2-4 = (X-1)(X^2+4X+4) = (X-1)(X+2)^2$$

À partir d'ici, tout le détail du calcul est donné, mais cela est superflu sur une copie. Il en ira de même pour les questions suivantes de cet exercice. Ainsi, on cherche une décomposition de la forme

$$\frac{-3X^2+4}{(X-1)(X+2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{(X+2)^2}$$

- En multipliant par $X-1$ et en substituant X par 1, on trouve
$$\frac{-3+4}{(1+2)^2} = a+0+0 \implies a = \frac{1}{9}$$
- En multipliant par $(X+2)^2$ et en substituant X par -2, on trouve
$$\frac{-3\times 4+4}{(-2-1)} = 0+0+c \implies c = \frac{8}{3}$$
- En multipliant par X et en prenant la limite en $+\infty$, on trouve
$$-3 = a+b+0 \implies b = -3-a = -\frac{10}{9}$$

Finalement, la décomposition recherchée est

$$\boxed{\frac{X^3}{X^3+3X^2-4} = 1 + \frac{\frac{1}{9}}{X-1} + \frac{-\frac{10}{9}}{X+2} + \frac{\frac{8}{3}}{(X+2)^2}}$$

2) Décomposer en éléments simples $\dfrac{2}{X^4-1}$ dans $\mathbb{R}$. **(/5,5)**

(Ici, la partie entière est nulle, pas besoin de la calculer) On factorise le dénominateur. Les racines de X^4-1 sont les racines quatrième de l'unité, donc

$$\begin{aligned} X^4-1 &= (X-1)(X+1)(X-i)(X+i) \\ &= (X-1)(X+1)(X^2+1) \end{aligned}$$

Ainsi, on cherche une décomposition de la forme

$$\frac{2}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

- En multipliant par $X-1$ et en substituant X par 1, on trouve

$$\frac{2}{2\times 2} = a+0+0 \implies a = \frac{1}{2}$$

- En multipliant par $X+1$ et en substituant X par -1, on trouve

$$\frac{2}{-2\times 2} = 0+b+0 \implies b = -\frac{1}{2}$$

- En multipliant par X^2+1 et en substituant X par i, on trouve

$$\frac{2}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}+1)} = 0+0+ci+d$$

  c'est-à-dire

$$\frac{2}{-1-1} = -1 = c\mathrm{i}+d$$

  Ainsi, $c=0$ et $d=-1$.

Finalement, la décomposition recherchée est

$$\boxed{\frac{2}{X^4-1} = \frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{X+1} + \frac{-1}{X^2+1}}$$

Note : un argument de parité permettait également de trouver que $c=0$ et $a=-b$ à moindre coût.

3) On cherche à factoriser le polynôme X^4+X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

a) Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. **(/1,5)**

Le discriminant est $\Delta = 1-4 = -3 \neq 0$, donc ce polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = j \qquad z_2 = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \{j, \overline{j}\}}$$

b) En déduire une factorisation de X^4+X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$. **(/5,5)**

Soit $z\in\mathbb{C}$. Si on pose $Z=z^2$, alors

$$\begin{aligned} z^4+z^2+1=0 &\iff Z^2+Z+1=0 \\ &\iff Z=z^2\in\{j,\overline{j}\} \qquad \text{par la question a)} \end{aligned}$$

Or,

$$z^2 = j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \iff z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\pi} = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$$
$$z^2 = \overline{j} = e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \iff z = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \text{ ou } z = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\pi} = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

Finalement, on a trouvé les quatre racines de z^4+z^2+1. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est donc

$$\boxed{X^4+X^2+1 = \left(X-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

(Les racines sont toutes de multiplicité 1 car la somme des multiplicités doit donner le degré du polynôme, ici 4, et enfin le coefficient dominant λ de la décomposition vaut 1)

c) Conclure. (/4)

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées :

$$\begin{aligned}\left(X - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) &= X^2 - 2\mathrm{Re}\,(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})X + 1 \\ &= X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1 \\ &= X^2 - X + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(X - e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}\right)\left(X - e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\right) &= X^2 - 2\mathrm{Re}\,(e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}})X + 1 \\ &= X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X + 1 \\ &= X^2 + X + 1\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)}$$

Exercice 2 : Espaces vectoriels (et un peu de DL)

1) Montrer que $C^\infty(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. (/4)

Montrons que $C^\infty(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $C^0(\mathbb{R})$. La fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est clairement de classe C^∞ donc $C^\infty(\mathbb{R})$ est non vide.

Soit $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha f + \beta g$ est également de classe C^∞. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est de classe C^n avec

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Ainsi, $\alpha f + \beta g \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où $C^\infty(\mathbb{R})$ est un s.e.v. de $C^0(\mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans ce qui suit, on note $p, q, r \in C^\infty(\mathbb{R})$ trois fonctions définies par

$$p(x) = e^x \qquad q(x) = e^{2x} \qquad r(x) = e^{x^2}$$

et on note $\mathcal{F} = (p, q, r)$, ainsi que $E = \mathrm{Vect}(p, q, r)$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$ engendré par p, q, r.

2) On propose de montrer que $\mathcal{F}$ est libre de trois façons. Soit donc a, b, c des réels tels que $ap+bq+cr = 0$.

a) L'étudiante Eva a prouvé que $\mathcal{F}$ est libre en évaluant $(ap + bq + cr)(x) = 0$ en plusieurs points x. Écrire une preuve à partir de cette idée. (/4)

Comme $ap + bq + cr = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(ap + bq + cr)\,(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{x^2} = 0$$

En évaluant en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$, on trouve

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ae + be^2 + ce = 0 \\ ae^2 + be^4 + ce^4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e & e^2 & e & 0 \\ e^2 & e^4 & e^4 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & e & 1 & 0 \\ 1 & e^2 & e^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2/e \\ L_3/e^2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e-1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2-1 & e^2-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2/(e-1) \\ L_3/(e^2-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Donc $a = b = c = 0$. On en déduit que la famille (p, q, r) est libre.

b) L'étudiant Dave a utilisé un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $ap + bq + cr$. Écrire une preuve à partir de cette idée. **(/4,5)**

$$p(x) = e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$q(x) = e^{2x} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} r(x) = e^{x^2} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} ap(x) + bq(x) + cr(x) &\underset{x\to 0}{=} a\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + b\left(1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)\right) + c\left(1 + x^2 + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a + b + c + (a + 2b)\, x + \left(\frac{a}{2} + 2b + c\right) x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Or,

$$ap(x) + bq(x) + cr(x) = 0 \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$$

Par unicité du DL, on en déduit que

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ \dfrac{a}{2}+2b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2b \\ -b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c=0 \\ 2b=0 \\ a=-2b \end{cases} \quad \begin{cases} 2c=0 \\ 2b=0 \\ a=-2b \end{cases}$$

Donc $c = b = a = 0$. Ainsi, la famille (p, q, r) est libre.

c) L'étudiant Liam a utilisé le comportement des fonctions p, q et r en $+\infty$. Écrire une preuve à partir de cette idée. **(/5)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ap(x) + bq(x) + cr(x) = ae^x + be^{2x} + ce^{x^2} = 0$$

En divisant par e^{x^2}, on obtient

$$ae^{x-x^2} + be^{2x-x^2} + c = 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que $a \times 0 + b \times 0 + c = 0$, donc $c = 0$. On a alors

$$ae^x + be^{2x} = 0$$

En divisant par e^{2x} et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve de même que $b = 0$. Finalement $ae^x = 0$ et en divisant par e^x on trouve $a = 0$. Ainsi, $a = b = c = 0$. La famille (p, q, r) est donc libre.

3) Est-ce que la famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, p)$ est libre ? Justifier. **(/4)**

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ainsi,

$$\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x = p(x)$$

Par arbitraire sur x, on a donc $p = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$. La famille $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, p)$ est donc liée. Elle n'est donc pas libre.

On pose

$$f : x \mapsto \mathrm{ch}^2 x \qquad g : x \mapsto \mathrm{sh}^2 x \qquad h : x \mapsto \mathrm{ch}(2x)$$

On considère la famille $\mathcal{B} = (f, g, h)$, ainsi que $F = \mathrm{Vect}(f, g, h)$.

4) Est-ce que la famille (f, g, h) est libre ? Justifier. **(/6,5)**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) \\
\mathrm{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) \\
\mathrm{ch}(2x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}
\end{aligned}$$

On constate alors que

$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}(2x)$$

c'est-à-dire $f + g = h$, si bien que la famille (f, g, h) est liée. Elle n'est donc pas libre.

5) Donner une base de F. **(/6)**

La famille (f, g, h) est génératrice de F mais pas libre. Cherchons une sous-famille qui serait une base de F. On pose

$$\mathcal{C} = (f, g)$$

Comme $h \in \mathrm{Vect}(f, g)$, on a $F = \mathrm{Vect}(f, g, h) = \mathrm{Vect}(f, g)$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est génératrice. Vérifions si $\mathcal{C}$ est libre. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $af + bg = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$af(x) + bg(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$, on trouve

$$af(0) + bg(0) = a + 0 = 0$$

donc $a = 0$. Ainsi, on a $bg(x) = 0$ pour tout x. En évaluant en $x = 1$, on en déduit

$$bg(1) = b\mathrm{sh}(1) = 0$$

Or, $\mathrm{sh}(1) \neq 0$ donc on en déduit que $b = 0$. Finalement $a = b = 0$, la famille $\mathcal{C}$ est libre. Ainsi, $\boxed{(f, g) \text{ est une base de } F}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire les développements limités à l'ordre n en 0 de f, g, h. **(/9)**

Par la question 4, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$h(x) = \mathrm{ch}(2x)$$

Or,
$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

D'où
$$\boxed{h(x) = \mathrm{ch}(2x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{2^k}{k!} x^k + o(x^n)}$$

Maintenant, on a
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{ch}(2x) \end{aligned}$$

Ainsi, $f = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}h$ donc :
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{2^k}{k!} x^k + o(x^n)$$

C'est-à-dire
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!} x^k + o(x^n)}$$

Enfin, comme $f - g = 1$, on a $g = f - 1$, si bien que
$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!} x^k + o(x^n)}$$

Exercice 3 : DL

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. **(/7)**

Comme la fonction est paire, les termes de degrés impairs de ses DL sont nuls. Il suffit donc de trouver le $DL_2(0)$ pour en déduire le $DL_3(0)$. On a
$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

donc
$$\sqrt{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)}\end{aligned}$$

On pose $X = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et comme

$$\sqrt{1+X} \underset{X\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}X+o(X)$$

On en déduit par composition que

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)+o\left(\left(\frac{1}{4}x^2+o(x^2)\right)^2\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a le $DL_2(0)$ de la fonction. Comme elle est paire, le terme de degré 3 est nul, si bien que :

$$\boxed{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x^2+o(x^3)}$$

2) Déterminer le $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\tan x$. **(/9)**

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{4}+h \in D_{\tan}$. On pose

$$f : h \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$$

et on cherche le $DL_3(0)$ de f. On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos h+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin h}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos h-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin h} = \frac{\cos h+\sin h}{\cos h-\sin h}$$

Or,

$$\begin{aligned}\cos h &\underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h^2}{2}+o(h^3)\\ \sin h &\underset{h\to 0}{=} h-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1+h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)}{1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)}$$

On pose $X = h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. On a

$$\frac{1}{1-X} \underset{X\to 0}{=} 1+X+X^2+X^3+o(X^3)$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)} &\underset{h\to 0}{=} 1+\left(h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)+\left(h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)^2 \\ &\quad +\left(h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)^3+o\left(\left(h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)^3\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+h^2+h^3+h^3+o(h^3) \\ &\underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{3h^2}{2}+\frac{11}{6}h^3+o(h^3)\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) &\underset{h\to 0}{=} \left(1+h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)\left(1+h+\frac{3h^2}{2}+\frac{11}{6}h^3+o(h^3)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{3h^2}{2}+\frac{11}{6}h^3+h+h^2+\frac{3h^3}{2}-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\end{aligned}$$

Donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) \underset{h\to 0}{=} 1+2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3+o(h^3)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} 1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}$$

Problème : Étude de fonction et accélération de convergence

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1) Donner le domaine de définition de f. **(/1,5)**

L'expression $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$ a un sens si et seulement si $x \neq 0$ et $1+x>0$. Ainsi,

$$\boxed{D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$$

2) Montrer que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e-e\frac{x}{2}+e\frac{11}{24}x^2+o(x^2)$$

(/7)

On a

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

Donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to 0}{=} e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{=} e\times e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}\end{aligned}$$

On pose $X = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et comme

$$e^X \underset{X\to 0}{=} 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + \frac{\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2}{2} + o\left(\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{4} + o(x^2) \end{aligned}$$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} e \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)}$$

3) En déduire la limite de la fonction f en 0. Dans la suite, on considère avoir prolongé f par cette valeur en 0. **(/1,25)**

Comme $f(x) \underset{x\to 0}{=} e + o(1)$, on en déduit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e}$.

4) Montrer que f (ainsi prolongée) est dérivable en 0 et donner $f'(0)$. **(/1,75)**

Comme $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) - e\frac{x}{2} + o(x)$, on en déduit que f est dérivable en 0 avec $\boxed{f'(0) = -\frac{e}{2}}$.

5) Expliciter l'équation de la tangente à f en 0, ainsi que la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente. **(/4)**

Comme $f(x) \underset{x\to 0}{=} e - \frac{e}{2}x + o(x)$, on en déduit que la courbe de f admet pour tangente en 0 la droite d'équation

$$\boxed{y = e - \frac{e}{2}x}$$

De plus,

$$f(x) - \left(e - \frac{e}{2}x\right) \underset{x\to 0}{=} e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2)$$

donc $f(x) - \left(e - \frac{e}{2}x\right)$ est positive au voisinage de 0. Ainsi,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente en } 0}$$

6) Est-ce que f admet un extremum local en 0 ? Si oui, préciser si c'est un minimum ou un maximum. **(/2,5)**

Comme $f'(0) = -\frac{e}{2} \neq 0$, le point 0 n'est pas un point critique de f. Comme c'est un point intérieur du domaine de définition de f, ce n'est donc pas un extremum local.

7) Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0. **(/2,5)**

On a $f(x)-e \underset{x\to 0}{=} -\frac{e}{2}x+o(x)$, donc $\boxed{f(x)-e \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{2}x}$.

On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la suite $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

8) En utilisant les questions précédentes, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n-e)_{n\in\mathbb{N}}$. **(/6)**

On a $u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$. Or, $\frac{1}{n}\to 0$ et par la question 3, on a $\lim_{x\to 0} f(x)=e$. Par composition de limites,

$$\boxed{u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)\to e}$$

De plus, $u_n-e=f\left(\frac{1}{n}\right)-e$. Or, par la question précédente, $f(x)-e \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{2}x$ donc par composition à droite, on a

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-e\sim -\frac{e}{2n}$$

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la suite $v_n=2u_{2n}-u_n$.

9) Donner un équivalent de la suite $(v_n-e)_{n\in\mathbb{N}}$. Quel est l'intérêt de cette suite ? **(/9,5)**

On a

$$v_n-e=2u_{2n}-u_n-e=2f\left(\frac{1}{2n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)-e$$

Pour trouver un équivalent de v_n, il faut un équivalent quand x tend vers 0 de $2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)-e$ et faire une composition à droite. Or,

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\underset{x\to 0}{=} e-e\frac{x}{4}+e\frac{11}{96}x^2+o(x^2)$$

Donc

$$\begin{aligned}2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)-e &\underset{x\to 0}{=} 2\left(e-e\frac{x}{4}+e\frac{11}{96}x^2+o(x^2)\right)-\left(e-e\frac{x}{2}+e\frac{11}{24}x^2+o(x^2)\right)-e\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{11}{48}ex^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Ainsi, $2f\left(\frac{x}{2}\right)-f(x)-e \underset{x\to 0}{\sim} \frac{11}{48}ex^2$ et par composition à droite,

$$\boxed{v_n-e\sim\frac{11}{48}\cdot\frac{e}{n^2}}$$

La convergence de (v_n) vers e est plus rapide que celle de (u_n) car l'équivalent est en $\frac{1}{n^2}$.