DS n°7 : corrigé (142 pts ramené sur 100, ±3 pts pour le soin*)

Exercice : Table de groupe (27.5 pts)

1) Quel est l'élément neutre de G ? Justifier. **(3.5 pts)**

On lit sur la table que

$$\forall x \in G \qquad ix = xi = x$$

donc $\boxed{i \text{ est élément neutre de } G}$.

2) Déterminer $i^{-1}, j^{-1}, k^{-1}, \ell^{-1}$. **(3.5 pts)**

Par la question précédente, i est élément neutre de G. Or, on lit sur la table que $j^2 = i$, donc j est inversible et $\boxed{j^{-1} = j}$.

De même, $\boxed{k^{-1} = k}$ et $\boxed{\ell^{-1} = \ell}$.

3) On cherche à déterminer le produit jk.

a) On suppose que $jk = j$. Déduire une contradiction. **(3.5 pts)**

Si $jk = j$, alors en multipliant par j^{-1} à gauche, on a $k = i$. C'est absurde car i, j, k, ℓ sont distincts par hypothèse.

b) Même question avec $jk = k$. **(3.5 pts)**

Si $jk = k$, alors en multipliant par k^{-1} à droite, on a $j = i$. Comme à la question précédente, c'est une contradiction.

c) Peut-on avoir $jk = i$? Conclure. **(7.5 pts)**

Supposons par l'absurde que $jk = i$. Alors k serait l'inverse de j, i.e. $j^{-1} = k$. Cependant, $j^{-1} = j \neq k$ par la question 2. Contradiction. Finalement, $jk \neq i$. Comme $jk \in G$ et que $jk \notin \{i, j, k\}$ par ce qui précède, on a nécessairement $\boxed{jk = \ell}$.

4) Recopier la table et la compléter (sans justifier). **(5 pts)**

	i	j	k	ℓ
i	i	j	k	ℓ
j	j	i	ℓ	k
k	k	ℓ	i	j
ℓ	ℓ	k	j	i

*les points de soin bonus ne peuvent dépasser 10% de la note : pour avoir 3 points de soin, il faut au minimum avoir 30 points sur 140.

Exercice : Racines p-ièmes de I_n (37.5 pts)

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $p \geq 2$. On pose :

$$\mathcal{R}_p := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}$$

On rappelle qu'on note $GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

1) $\mathcal{R}_p$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? **(4 pts)**

Supposons par l'absurde que $\mathcal{R}_p$ soit un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a immédiatement que $I_n^p = I_n$, donc $I_n \in \mathcal{R}_p$. Comme $\mathcal{R}_p$ est un sous-anneau, on en déduit que

$$I_n - I_n = 0 \in \mathcal{R}_p$$

ce qui est absurde car $0^p = 0 \neq I_n$. Contradiction. Donc $\mathcal{R}_p$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $A \in \mathcal{R}_p$ et $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $B^{-1}AB \in \mathcal{R}_p$. **(5 pts)**

On a

$$\begin{aligned}
(B^{-1}AB)^p &= \underbrace{B^{-1}AB \times B^{-1}AB \times \cdots \times B^{-1}AB}_{p \text{ fois}} \\
&= B^{-1}\underbrace{AA\ldots A}_{p \text{ fois}}B \\
&= B^{-1}A^pB \\
&= B^{-1}I_nB & \text{car } A \in \mathcal{R}_p \\
&= B^{-1}B \\
&= I_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $B^{-1}AB \in \mathcal{R}_p$.

3) Soit $A \in \mathcal{R}_p$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer A^{-1}. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{R}_p$. **(7.5 pts)**

On a $A^p = I_n$ donc $A \times A^{p-1} = I_n$ (on peut écrire A^{p-1} car $p - 1 \geq 0$). Ainsi, A est inversible avec $A^{-1} = A^{p-1}$. (Il suffit de ne vérifier qu'un seul sens pour les matrices, cf cours).

Vérifions que $A^{-1} \in \mathcal{R}_p$. On a

$$\begin{aligned}
(A^{-1})^p &= (A^{p-1})^p \\
&= A^{p(p-1)} \\
&= (A^p)^{p-1} \\
&= (I_n)^{p-1} = I_n & \text{car } A \in \mathcal{R}_p
\end{aligned}$$

Ainsi, $A^{-1} \in \mathcal{R}_p$.

4) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{R}_p \cap D_n(\mathbb{R})$, où $D_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-ensemble des matrices diagonales. **(10 pts)**

Soit $A \in D_n(\mathbb{R})$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Alors, comme A est diagonale,

$$\begin{aligned}
& A \in \mathcal{R}_p \\
\iff & A^p = I_n \\
\iff & \begin{pmatrix} \alpha_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\
\iff & \forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \alpha_i^p = 1
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

- Si $p \in 2\mathbb{N}+1$, alors pour tout i, $\alpha_i^p = 1 \iff \alpha_i = 1$. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{R}_p \cap D_n(\mathbb{R}) = \{I_n\}}$$

- Si $p \in 2\mathbb{N}$, alors pour tout i, $\alpha_i^p = 1 \iff \alpha_i \in \{\pm 1\}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{R}_p \cap D_n(\mathbb{R}) = \{\, \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1, 1\}\,\}}$$

5) Soit q un entier naturel supérieur ou égal à 2, et d le plus grand commun diviseur de p et q. Montrer que $\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q = \mathcal{R}_d$. **(11 pts)**

On procède par double inclusion. Soit $A \in \mathcal{R}_d$. On pose $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que

$$d = pk \qquad d = q\ell$$

Alors, comme $A^d = I_n$, on a

$$A^p = A^{dk} = (A^d)^k = I_n^k = I_n$$

et de même $A^q = I_n$. Ainsi $A \in \mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q$. Par arbitraire sur A, $\mathcal{R}_d \subset \mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q$. Par le théorème de Bézout-Bachet, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = d$. Alors

$$A^d = A^{pu+qv} = (A^p)^u (A^q)^v = I_n^u I_n^v = I_n$$

D'où $A \in \mathcal{R}_d$. On en déduit que $\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q \subset \mathcal{R}_d$. Finalement, $\mathcal{R}_p \cap \mathcal{R}_q = \mathcal{R}_d$.

Problème : polynômes de Tchebyshev (77 pts)

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ par :

$$T_0 = 1 \qquad T_1 = X$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie A – Généralités (20 pts)

1) Calculer T_2, T_3, T_4 et T_5. **(3 pts)**

$$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$$
$$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$$
$$T_4 = (...) = 8X^4 - 8X^2 + 1$$
$$T_5 = (...) = 16X^5 - 20X^3 + 5X$$

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1$. **(4 pts)**

On procède par récurrence double sur n.

- On a $T_0(1) = 1$ et $T_1(1) = 1$ donc la propriété est vérifiée pour les rangs $n = 0$ et $n = 1$.
- Étant donné un $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie pour les rangs n et $n+1$, et montrons qu'elle l'est au rang $n+2$. Comme
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$
on en déduit que
$$\begin{aligned} T_{n+2}(1) &= 2T_{n+1}(1) - T_n(1) \\ &= 2 \times 1 - 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 1 \end{aligned}$$
D'où la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement $\boxed{T_n(1) = 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer le degré de T_n. **(5.5 pts)**

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que $\deg T_n = n$.

- On a immédiatement $\deg T_0 = 0$ et $\deg T_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Étant donné un $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie pour les rangs n et $n+1$, et montrons qu'elle l'est au rang $n+2$.
$$\deg T_{n+2} = \deg\left(2XT_{n+1} - T_n\right)$$
Or, par hypothèse de récurrence,
$$\deg(2XT_{n+1}) = \deg X + \deg T_{n+1} = 1 + n + 1 = n + 2$$
$$\deg T_n = n$$
Ainsi, ces deux polynômes étant de degrés distincts, on a
$$\deg T_{n+2} = \max\left(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n)\right) = n + 2$$
D'où la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement $\boxed{\deg T_n = n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer le coefficient dominant de T_n pour tout $n \geq 1$. **(7.5 pts)**

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}.

- Les coefficients dominants de T_1 et T_2 sont respectivement $1 = 2^{1-1}$ et $2 = 2^{2-1}$, donc la propriété est vraie aux rangs $n = 1$ et $n = 2$.

- Étant donné un $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie pour les rangs n et $n+1$, et montrons qu'elle l'est au rang $n+2$. On a $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Or, par la question précédente,
$$\deg T_n = n < n+2 = \deg(T_{n+2})$$
Ainsi, le coefficient dominant de T_{n+2} est le même que celui de $2XT_{n+1}$. Or, par hypothèse de récurrence, le coefficient dominant de T_{n+1} est 2^n, donc celui de $2XT_{n+1}$ est 2^{n+1}. On en déduit que T_{n+2} a pour coefficient dominant 2^{n+2-1} : la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement, pour tout $n \geq 1$, le coefficient dominant de T_n est $\boxed{2^{n-1}}$.

Partie B – Racines de T_n (32 pts)

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos((n+2)x) = 2(\cos x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$$
(5 pts)

On sait que pour tous $p, q \in \mathbb{R}$,
$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\left(\cos(p+q) + \cos(p-q)\right)$$
Avec $p = (n+1)x$ et $q = x$, on en déduit que
$$\cos((n+1)x)\cos x = \frac{1}{2}\left[\cos((n+2)x) + \cos(nx)\right]$$
D'où
$$\cos((n+2)x) = 2(\cos x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$$

6) En déduire que pour tout $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. **(6 pts)**

Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\theta)$$
$$T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\theta)$$
donc la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

- Étant donné un $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété vraie pour les rangs n et $n+1$, et montrons qu'elle l'est au rang $n+2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, on a
$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos\theta) &= 2(\cos\theta)T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) \\ &= 2(\cos\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$
par la question précédente. Donc la propriété est vraie au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Résoudre l'équation

$$\cos(nx) = 0$$

d'inconnue $x \in [0, \pi]$. **(6 pts)**

Soit $x \in [0, \pi]$. Si $n = 0$, il n'y a pas de solution car $\cos(0x) = \cos(0) = 1$. Si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} & \cos(nx) = 0 \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \quad nx = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \iff & \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{k}{n}\pi + \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

Cherchons les solutions qui sont dans $[0, \pi]$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & 0 \leq \frac{k}{n}\pi + \frac{\pi}{2n} \leq \pi \\ \iff & 0 \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{2n} \leq 1 \\ \iff & 0 \leq k + \frac{1}{2} \leq n \\ \iff & -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On voit que seules les valeurs de k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ conviennent. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{k}{n}\pi + \frac{\pi}{2n} \;\middle|\; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}}$$

8) En déduire que T_n admet n racines distinctes dans $[-1, 1]$, puis déterminer toutes ses racines dans $\mathbb{C}$. **(8 pts)**

On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$x_k := \frac{k}{n}\pi + \frac{\pi}{2n}$$

Par la question 7, pour tout tel k, on a $\cos(nx_k) = 0$, donc par la question 6, $T_n(\cos x_k) = 0$. Ainsi, $\cos x_k$ est racine de T_n et $\cos x_k \in [-1, 1]$. Cela représente n valeurs car $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Montrons que ces valeurs sont bien distinctes. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a

$$0 \leq x_k < x_{k+1} \leq \pi$$

et comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on en déduit que

$$\cos x_k > \cos x_{k+1}$$

Ainsi, la famille $(\cos x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est strictement décroissante : ses valeurs sont bien distinctes. On a donc n racines distinctes de T_n dans $[-1, 1]$.

Enfin, comme $\deg T_n = n$ par la question 3, on en déduit que T_n admet exactement n racines comptées avec multiplicité. Par ce qui précède, on a trouvé n racines distinctes de T_n dans $[-1, 1]$. Ainsi, on a trouvé toutes les racines de T_n.

9) *(bonus, ne sert pas pour la suite)* Factoriser T_n dans $\mathbb{R}[X]$. **(7 pts)**

On a vu à la question précédente que T_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, à savoir $x_0, \dots, x_{n-1}$ définies par

$$x_k := \frac{k}{n}\pi + \frac{\pi}{2n} \qquad \text{avec } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Comme $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont réels, T_n admet n racines distinctes dans $\mathbb{R}$, donc est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Distinguons deux cas.

- Si $n = 0$, alors $T_n = T_0 = 1$ est déjà factorisé.
- Si $n \geq 1$, comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} par la question 4, on a

$$\boxed{T_n = 2^{n-1}(X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_n)}$$

Partie C – Relation arithmétique (25 pts)

10) Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P_1(\cos\theta) = P_2(\cos\theta)$$

Montrer que $P_1 = P_2$. **(6 pts)**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$P_1(\cos\theta) - P_2(\cos\theta) = 0$$

Ainsi, Le polynôme $P_1 - P_2$ admet $\cos\theta$ pour racine, et ce pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Or $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, si bien que $P_1 - P_2$ admet tout élément de $[-1, 1]$ pour racine.

En particulier, $P_1 - P_2$ admet une infinité de racines. Alors, nécessairement, $P_1 - P_2 = 0$, c'est-à-dire $P_1 = P_2$.

11) Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq m \leq n$. Montrer que

$$T_m T_n = \frac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right)$$

(8 pts)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Si on montre que

$$(T_m T_n)(\cos\theta) = \left[\frac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right)\right](\cos\theta)$$

alors la question précédente permet de conclure. Or, par la question 6, on a

$$\begin{aligned}(T_m T_n)(\cos\theta) &= T_m(\cos\theta) T_n(\cos\theta)\\ &= \cos(m\theta)\cos(n\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right)\right](\cos\theta) &= \frac{1}{2}\cos\left((n+m)\theta\right) + \frac{1}{2}\cos\left((n-m)\theta\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos(n\theta)\cos(m\theta) - \frac{1}{2}\sin(n\theta)\sin(m\theta)\\ &\quad + \frac{1}{2}\cos(n\theta)\cos((-m)\theta) - \frac{1}{2}\sin(n\theta)\sin((-m)\theta)\\ &= \cos(n\theta)\cos(m\theta)\end{aligned}$$

Finalement, on a bien l'égalité voulue, d'où

$$T_n T_m = \frac{1}{2}\left(T_{n+m} + T_{n-m}\right)$$

12) On suppose que $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m < n < 3m$. On suppose que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de T_n par T_m. Montrer que

$$Q = 2T_{n-m} \qquad \text{et} \qquad R = -T_{|n-2m|}$$

(11 pts)

Vérifions que $T_n = T_m Q + R$. On distingue deux cas :

1) Si $2m \leq n < 3m$, alors $R = -T_{n-2m}$. Alors

$$\begin{aligned} T_m Q + R &= 2T_{n-m}T_m - T_{n-2m} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\left(T_{n-m+m} + T_{n-m-m}\right) - T_{n-2m} \qquad \text{car } n-m \geq m \\ &= T_n \end{aligned}$$

2) Si $m < n \leq 2m$, alors $R = -T_{2m-n}$. Alors

$$\begin{aligned} T_m Q + R &= 2T_m T_{n-m} - T_{2m-n} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\left(T_{m+n-m} + T_{m-(n-m)}\right) - T_{2m-n} \qquad \text{car } m \geq n-m \\ &= T_n \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien $T_n = T_m Q + R$. De plus, par la question 3,

$$\deg R = \deg(T_{|n-2m|}) = |n - 2m|$$

$$\deg T_m = m$$

Et comme $m < n < 3m$, on a

$$-m < n - 2m < m$$

donc $|n - 2m| < m$. D'où $\deg R < \deg T_m$. Ainsi, $T_n = T_m Q + R$ est bien la division euclidienne de T_n par T_m.