DS n°5 : corrigé (sur 115 points, dont ±3 de soin, ramené sur 100)

Exercice 1

1) Montrer que $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. **(/2)**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1+e^x > 1$ donc $f(x)$ a un sens. Ainsi $D_f = \mathbb{R}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de telles fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)-(e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

Ainsi, $f'' \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1+\sqrt{ab} \leq \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$. **(/6)**

Comme f est convexe, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \ln(1+e^{\frac{x+y}{2}}) \leq \frac{1}{2}\ln(1+e^x) + \frac{1}{2}\ln(1+e^y) \\
\Longrightarrow\ & \ln(1+\sqrt{e^{x+y}}) \leq \ln\sqrt{1+e^x} + \ln\sqrt{1+e^y} \\
\Longrightarrow\ & \ln(1+\sqrt{e^x e^y}) \leq \ln\left(\sqrt{1+e^x}\sqrt{1+e^y}\right) \\
\Longrightarrow\ & 1+\sqrt{e^x e^y} \leq \sqrt{1+e^x}\sqrt{1+e^y} \qquad \text{car exp est croissante}
\end{aligned}$$

En posant $a = e^x$ et $b = e^y$, lorsque x, y parcourent $\mathbb{R}$, a et b parcourent $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \qquad 1+\sqrt{ab} \leq \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}}$$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2f(x) \geq x + 2\ln 2$. **(/4)**

f étant convexe, sa courbe C_f est au-dessus de ses tangentes. La tangente en 0 de f a pour équation

$$y = f'(0)x + f(0) = \frac{1}{1+1}x + \ln(1+1) = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2$, ou encore $\boxed{2f(x) \geq 2x + 2\ln 2}$.

Exercice 2

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ **(/1,5)**.

La fonction ln est dérivable en 1 donc

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} \ln'(1) = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

2) En déduire $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\sin\theta) - \ln(\cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$. **(/6,5)**

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\ln(\sin\theta) - \ln(\cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta} &= \frac{1}{\cos\theta} \frac{\ln\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 1} \\ &= \frac{1}{\cos\theta} \frac{\ln(\tan\theta)}{\tan\theta - 1}\end{aligned}$$

Or, $\tan\theta \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{4}]{} 1$ et par la question 1, $\dfrac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$ donc par composition de limites,

$$\frac{\ln(\tan\theta)}{\tan\theta - 1} \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{4}]{} 1$$

Par ailleurs, $\dfrac{1}{\cos\theta} \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{4}]{} \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$. Par produit de limites,

$$\frac{1}{\cos\theta} \frac{\ln(\tan\theta)}{\tan\theta - 1} \xrightarrow[\theta \to \frac{\pi}{4}]{} \sqrt{2}$$

La limite recherchée est donc $\boxed{\sqrt{2}}$.

Problème 1 : une équation de Mordell

On cherche à déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ qui vérifient l'équation (dite de Mordell) :

$$(\mathcal{M}) : \quad y^2 = x^3 + 16$$

On dit qu'un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un *cube parfait* s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $a = n^3$.

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair. **(/2)**

Supposons a pair. Alors $2 \mid a$. Donc $2 \mid a \times a$, ou encore $2 \mid a^2$. Ainsi, a^2 est pair.
Pour montrer le sens réciproque, on passe par la contraposée : supposons que a est impair et montrons que a^2 est impair. Comme $a \in 2\mathbb{Z} + 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$. Alors

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$$

Ainsi, a^2 est impair. Finalement, on a bien démontré l'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^3 est pair. **(/2,5)**

Supposons a pair. Alors $2 \mid a$, donc $2 \mid a \times a^2$, ou encore $2 \mid a^3$. Ainsi a^3 est pair.
Pour montrer le sens réciproque, on passe à nouveau par la contraposée. Supposons a impair. Alors a^2 est aussi impair par la question 1. Ainsi, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $a^2 = 2k' + 1$. On en déduit que

$$a^3 = (2k+1)(2k'+1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2\left(2kk' + k + k'\right) + 1 \in 2\mathbb{Z} + 1$$

Ainsi, a^3 est impair. Finalement, on a bien démontré l'équivalence.

3) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux. Montrer que pour tout nombre premier p, on a $v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$. **(/3,5)**

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre premier p tel que $v_p(a) \geq 1$ et $v_p(b) \geq 1$. Alors $p \mid a$ et $p \mid b$. On en déduit donc que $p \mid a \wedge b$, c'est-à-dire $p \mid 1$. Ainsi, $p \in \{-1, 1\}$. Contradiction car p est premier.
Ainsi, pour tout nombre premier p, on a $v_p(a) = 0$ ou $v_p(b) = 0$.

Autre méthode : soit p un nombre premier. Si $p \mid a$ **et** $p \mid b$, alors a et b ne seraient pas premiers entre eux. Donc nécessairement $p \nmid a$ **ou** $p \nmid b$, ce qui équivaut à $v_p(a) = 0$ **ou** $v_p(b) = 0$.

4) En déduire que si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux et que ab est un cube parfait, alors a et b sont des cubes parfaits. *Indication : on pourra partir de la décomposition de l'entier n tel que $ab = n^3$.* **(/9)**

- Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors a, b ne sont pas premiers entre eux et il n'y a rien à démontrer.

- On traite ensuite le cas $a, b \in \mathbb{N}^*$. Soit n l'entier tel que $ab = n^3$. Comme $ab \geq 1$, on a $n \geq 1$. Si $n = 1$, alors $ab = 1$ donc $a, b \in \{-1, 1\}$ et ce sont clairement des cubes parfaits puisque $(-1)^3 = -1$ et $1^3 = 1$. Si $n \geq 2$, on pose la décomposition en facteurs premiers de n :
$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \qquad \alpha_i \geq 1$$
Alors
$$ab = n^3 = p_1^{3\alpha_1} \dots p_r^{3\alpha_r}$$
En particulier, pour tout indice i, on a
$$3\alpha_i = v_{p_i}(ab) = v_{p_i}(a) + v_{p_i}(b)$$
Par la question 3, comme a, b sont premiers entre eux, pour tout nombre premier p_i, on a $v_{p_i}(a) = 0$ ou $v_{p_i}(b) = 0$. Ainsi, pour chaque indice i, on a
$$\begin{cases} v_{p_i}(a) = 0 \\ v_{p_i}(b) = 3\alpha_i \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} v_{p_i}(a) = 3\alpha_i \\ v_{p_i}(b) = 0 \end{cases}$$
Ainsi, si on pose la décomposition (généralisée selon $p_1, \dots, p_r$) de a :
$$a = p_1^{\gamma_1} \dots p_r^{\gamma_r} \qquad \gamma_i \geq 0$$
on a $\gamma_i = 3\alpha_i$ ou $\gamma_i = 0$. Si on note J l'ensemble (éventuellement vide) des indices i tels que $\gamma_i = 3\alpha_i$, on obtient donc
$$a = \prod_{i \in J} p_i^{3\alpha_i} = \left(\prod_{i \in J} p_i^{\alpha_i} \right)^3$$
donc a est un cube parfait (si $J = \varnothing$ alors $a = 1 = 1^3$). De même on montre que b est un cube parfait

- Enfin, on traite le cas général $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $ab = n^3$. On pose $a' = |a|$ et $b' = |b|$, de sorte que
$$a'b' = |a|\,|b| = |n^3| = |n|^3$$
Ainsi, $a'b'$ est un cube parfait. Or, comme $a', b' \in \mathbb{N}^*$, on a vu que a', b' sont des cubes parfaits : il existe donc $k, h \in \mathbb{N}^*$ tels que $a' = k^3$ et $b' = h^3$. On en déduit que, si $a < 0$, alors
$$a = -a' = -k^3 = (-k)^3$$
tandis que si $a > 0$, alors $a = a' = k^3$. Dans les deux cas, a est un cube parfait. De même pour b.

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de $(\mathcal{M})$ tel que y soit impair.

5) Montrer que y^2 est impair et en déduire que x est impair. **(/4)**

Par la question 1), comme y est impair, y^2 est aussi impair. Ensuite, comme (x,y) est solution de $(\mathcal{M})$,

$$x^3 = \underbrace{y^2}_{\in 2\mathbb{Z}+1} - \underbrace{16}_{\in 2\mathbb{Z}} \in 2\mathbb{Z}+1$$

Ainsi, x^3 est impair. Par la question 2), x est impair.

6) Soit d un diviseur de $y-4$ et de $y+4$. Montrer que d divise 8, et que d est impair. **(/4)**

$d \mid y-4$ et $d \mid y+4$ ainsi $d \mid (y+4)-(y-4)$ donc $d \mid 8$.

Supposons par l'absurde que d soit pair. Alors $2 \mid d$ et comme $d \mid y+4$ on a donc $2 \mid y+4$. Or, y est impair donc $y+4$ aussi, si bien que $2 \nmid y+4$. Contradiction. Ainsi, d est impair.

7) En déduire que $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux. **(/3)**

Soit $m = (y-4) \wedge (y+4)$. Alors $m \mid y-4$ et $m \mid y+4$. Par la question 6, $m \mid 8$ et m est impair. Or, les seuls diviseurs impairs de 8 sont 1 et -1. Comme $m \geq 1$, on en déduit que $m=1$. Ainsi, $y-4$ et $y+4$ sont premiers entre eux.

8) En déduire qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $y+4 = u^3$ et $y-4 = v^3$. **(/4)**

Comme

$$x^3 = y^2 - 16 = (y-4)(y+4)$$

alors en posant $n = x^3$, $a = y-4$ et $b = y+4$, on a $ab = n^3$. Or, $a \wedge b = (y-4) \wedge (y+4) = 1$ par la question 7. Alors, par la question 4, on en déduit que a et b sont des cubes parfaits. Ainsi, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y+4 = b = u^3 \qquad y-4 = a = v^3$$

9) Montrer que $u-v$ est pair et que u^2+uv+v^2 est impair. **(/4)**

Par hypothèse, y est impair donc $y+4$ et $y-4$ le sont aussi. Or, $u^3 = y+4$ d'où par la question 2), u est impair. De même v est impair.

Comme u, v sont impairs, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $u = 2k+1$ et $v = 2k'+1$. Alors

$$u - v = 2k+1-(2k'+1) = 2(k-k') \in 2\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} u^2+uv+v^2 &= (2k+1)^2 + (2k+1)(2k'+1) - (2k'+1)^2 \\ &= 4k^2+4k+1+4kk'+2k'+2k+1-4k'^2-4k'-1 \\ &= 2\left(2k^2+2k+2kk'+k'+k-2k'^2-2k'\right)+1 \\ &\in 2\mathbb{Z}+1 \end{aligned}$$

10) En factorisant $u^3 - v^3$, montrer que $u = v+8$ et que $3v^2+24v+64 = 1$. **(/5)**

$$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2) \qquad \text{et} \qquad u^3 - v^3 = y+4-(y-4) = 8$$

Ainsi,

$$(u-v)(u^2+uv+v^2) = 8$$

Ainsi, $u^2+uv+v^2 \mid 8$ et u^2+uv+v^2 est impair par la question 9). On en déduit que $u^2+uv+v^2 \in \{-1, 1\}$. Par conséquent, $u - v \in \{-8, 8\}$. Or, par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

$$u = \sqrt[3]{y+4} > \sqrt[3]{y-4} = v$$

Ainsi, $u - v > 0$. Finalement, $u - v = 8$, c'est-à-dire $\boxed{u = v + 8}$.
Maintenant, comme $u - v = 8$, on a

$$\begin{aligned} & u^2 + uv + v^2 = 1 \\ \Longrightarrow\ & (v+8)^2 + (v+8)v + v^2 = 1 \\ \Longrightarrow\ & v^2 + 16v + 64 + v^2 + 8v + v^2 = 1 \\ \Longrightarrow\ & \boxed{3v^2 + 24v + 64 = 1} \end{aligned}$$

11) Conclure en donnant l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(\mathcal{M})$ tels que y soit impair. **(/4)**

Par la question 10, on a $3v^2 + 24v + 63 = 0$, ou encore $v^2 + 8v + 21 = 0$. Cherchons les racines de ce polynôme :

$$\Delta = 64 - 4 \times 21 = 64 - 82 = -18 < 0$$

Ainsi, ce polynôme n'a pas de racine réelle. Finalement, aucun réel v ne satisfait $3v^2 + 24v + 63 = 0$, et a fortiori aucun entier v.

Ainsi, si (x, y) est une solution de $(\mathcal{M})$ telle que y est impair, on en déduit l'existence d'un entier v qui est racine d'un polynôme qui n'a pas de racine. C'est une contradiction. Finalement,

$$\boxed{(\mathcal{M}) \text{ ne possède pas de couple } (x, y) \text{ solution avec } y \text{ impair.}}$$

Problème 2 : fonctions absolument monotones

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞. La fonction f est dite *absolument monotone* si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in]a, b[\qquad f^{(n)}(x) \geq 0$$

Partie A : généralités

1) Montrer que toute application absolument monotone est positive, croissante et convexe. Donner un exemple d'application absolument monotone décroissante. **(/2)**

Si f est absolument monotone, alors f, f', f'' sont positives, donc f est positive, croissante et convexe.

La fonction $\boxed{f : x \mapsto 0}$ est de classe C^∞ et on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = 0$. En particulier, $f^{(n)}$ est positive. Ainsi, f est absolument monotone. De plus, f est constante donc décroissante. f convient donc comme exemple.

2) Soit f, g deux fonctions absolument monotones sur $]a, b[$. Montrer que $f + g$ et fg le sont aussi. **(/4)**

La fonction $f + g$ est de classe C^∞ sur $]a, b[$ car f, g le sont et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]a, b[\qquad (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

Ainsi, $f + g$ est absolument monotone.

De même, fg est de classe C^∞ sur $]a, b[$ comme produit de telles fonctions. De plus, par la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [a, b] \qquad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Or, f, g étant absolument monotones, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f^{(k)}(x) \geq 0$ et $g^{(n-k)}(x) \geq 0$. Comme $\binom{n}{k} \geq 0$ on a donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$$

On en déduit que $(fg)^{(n)}(x)$ est positive, si bien que fg est absolument monotone.

3) Dans la suite, on note e^f l'application $x \mapsto e^{f(x)}$. Calculer $(e^f)'$. **(/1)**

f est dérivable donc par composition e^f aussi et on a

$$\boxed{(e^f)' = f' e^f}$$

4) En utilisant une récurrence forte et le fait que $(e^f)^{(n+1)} = ((e^f)')^{(n)}$, montrer que si f est absolument monotone sur $]a, b[$, alors e^f l'est aussi. **(/5)**

Soit f absolument monone sur $]a, b[$. Par composition de fonctions de classe C^∞, e^f est aussi de classe C^∞ sur $]a, b[$. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $(e^f)^{(n)} \geq 0$ sur $]a, b[$.

Pour $n = 0$, on a $(e^f)^{(0)} = e^f$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a bien $e^{f(x)} \geq 0$ car l'exponentielle est positive.

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $(e^f)^{(k)}$ soit positive pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Montrons que $(e^f)^{(n+1)}$ l'est aussi. On a :

$$\begin{aligned}
(e^f)^{(n+1)} &= ((e^f)')^{(n)} \\
&= (e^f f')^{(n)} \qquad \text{par la question 3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^f)^{(k)} (f')^{(n-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^f)^{(k)} f^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $(e^f)^{(k)}$ est positive pour tout $k \leq n$. De plus comme f est absoluement monotone, on a également $f^{(n+1-k)} \geq 0$. Ainsi, $(e^f)^{(n+1)} \geq 0$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: la fonction e^f est absolument monotone.

Partie B : la fonction arcsinus est absolument monotone sur $]0, 1[$

5) On pose $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$

$$u^{(n)}(x) = \alpha_n \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

où α_n est un réel qui dépend de n que l'on précisera. **(/5)**

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a $1 - x \neq 0$ donc u est définie sur $]0, 1[$. Comme u est une fonction rationnelle, elle est de classe C^∞ là où elle est définie donc en particulier sur $]0, 1[$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]0, 1[\qquad \boxed{u^{(n)}(x) = n! \frac{1}{(1-x)^{n+1}}}$$

Pour $n = 0$, on a bien que pour tout $x \in]0,1[$, $u^{(0)}(x) = u(x) = \dfrac{1}{1-x} = 0!\dfrac{1}{(1-x)^{0+1}}$.

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrons-la au rang $n+1$. Pour tout $x \in]a,b[$, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u^{(n+1)}(x) &= (u^{(n)})'(x) \\ &= n!\left(-\frac{-(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2(n+1)}}\right) \\ &= n!\frac{(n+1)}{(1-x)^{n+2}} \\ &= (n+1)!\frac{1}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang $n+1$. Finalement, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) Donner sans justification une formule pour $v^{(n)}(x)$, où $v : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. **(/2)**

On obtient la formule

$$v^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}}$$

7) En déduire que l'application $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$$

est absolument monotone sur $]0,1[$. **(/6)**

On a $g = u - v$. Par les questions 6 et 7, g est de classe C^∞ sur $]0,1[$ car u et v le sont, et pour tout $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= u^{(n)}(x) - v^{(n)}(x) \\ &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \\ &= n!\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Montrons que g est absolument monotone sur $]0,1[$. Résolvons l'inéquation $g^{(n)}(x) \geq 0$ avec $0 < x < 1$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & g^{(n)}(x) \geq 0 \\ \iff & \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} \geq 0 \qquad \text{car } n! > 0 \\ \iff & \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \geq \frac{(-1)^{n+2}}{(1+x)^{n+1}} \\ \iff & \frac{(1+x)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} \geq (-1)^n \qquad \text{car } 1+x > 0 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& 0 < 1 - x < 1 + x \\
\Longrightarrow\ & 0 < (1-x)^{n+1} < (1+x)^{n+1} && \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{(1-x)^{n+1}} > \frac{1}{(1+x)^{n+1}} && \text{par stricte croissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\
\Longrightarrow\ & \frac{(1+x)^{n+1}}{(1-x)^{,n+1}} > 1 \geq (-1)^n && \text{car } 1 + x > 0
\end{aligned}$$

si bien que $g^{(n)}(x) \geq 0$. Ainsi, g est absolument monotone sur $]0,1[$.

8) Montrer que l'application $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est absolument monotone sur $]0,1[$. *On pourra considérer $f = \ln \circ h$ et calculer f'.* **(/7)**

Pour tout $x \in]0,1[$, on a évidemment $h(x) > 0$, donc $f = \ln \circ h$ est bien définie sur $]0,1[$, et de plus

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

Ainsi, f est de classe C^∞ (sur $]0,1[$) par composée de telles fonctions.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{1-x^2} \\
&= \frac{x}{1-x^2} \\
&= \frac{x}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} \\
&= \frac{1}{2} g(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a immédiatement

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2} g^{(n)}(x) \geq 0 \qquad \text{car } g \text{ est absolument monotone par la question 7}$$

De plus, on a vu que $h \geq 1$, donc $f^{(0)} = f = \ln \circ h \geq 0$. Ainsi, f est absolument monotone sur $]0,1[$. Par la question 4, on en déduit que

$$e^f = e^{\ln \circ h} = h$$

est également absolument monotone sur $]0,1[$.

9) En déduire que l'application arcsin est absolument monotone sur $]0,1[$. **(/3)**

arcsin est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = h(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\arcsin^{(n+1)}(x) = h^{(n)}(x) \geq 0$$

car h est absolument monotone par la question 8. De plus, $\arcsin^{(0)} = \arcsin$ est positive sur $]0,1[$. Ainsi, arcsin est absolument monotone sur $]0,1[$.

Partie C : prolongement d'une application absolument monotone

On suppose que $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est absolument monotone sur $]a, b[$.

10) Montrer que f est prolongeable par *continuité* en a. On note $\tilde{f} : [a, b[\to \mathbb{R}$ ce prolongement continu. Montrer également que $\tilde{f}(a) \geq 0$. **(/4,5)**

Comme $f' \geq 0$ sur $]a, b[$, f est croissante sur $]a, b[$. Ainsi (par le théorème de la limite monotone), f admet une limite à droite (finie ou infinie) en a. De plus, comme $f \geq 0$ sur $]a, b[$, f est minorée par 0 sur $]a, b[$ donc la limite est finie : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a en posant

$$\tilde{f}(a) := \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Enfin, pour tout $x \in]a, b[$ on a $\tilde{f}(x) \geq 0$ donc en passant à la limite quand x tend vers a, par continuité de $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(a) = \lim_{x \to a} \tilde{f}(x) \geq 0$$

11) Justifier que $\tilde{f}'$ admet une limite en a. En déduire que $\tilde{f}$ est dérivable en a et que $\tilde{f}'(a) \geq 0$. **(/4,5)**

Comme $\tilde{f}$ est absolument monotone sur $]a, b[$, on montrerait facilement que $\tilde{f}'$ l'est aussi. Par la question précédente, la fonction $\tilde{f}'$ est donc prolongeable par continuité en a. En particulier, elle admet une limite finie en a.

Alors, $\tilde{f}$ est continue sur $[a, b[$, dérivable sur $]a, b[$ et $\tilde{f}'$ admet une limite (épointée) finie en a. Par le théorème de la limite de la dérivée, $\tilde{f}$ est dérivable en a et

$$\tilde{f}'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \tilde{f}'(x)$$

Enfin, comme $\tilde{f}'$ est positive sur $]a, b[$, la limite ci-dessus est également positive. Donc $\tilde{f}'(a) \geq 0$.

12) Est-ce que f est prolongeable par continuité en b ? **(/3)**

Non. Contre-exemple : la fonction h de la question 8 est absolument monotone sur $]0, 1[$, mais il est clair que

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = +\infty$$

et par conséquent, h n'est pas prolongeable par continuité en 1.