DS n°4 : corrigé (125 pts, ramené sur 100)

Exercice 1 (17 pts)

1) Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin t}$. On pourra poser $u = \cos t$. **(5 pts)**

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin t} \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t} && u = \cos t \qquad du = -\sin t\,dt \\
&= \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{1-u^2} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)(1+u)} \\
&= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln|1-u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} \left[\ln|1+u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}
\end{aligned}$$

2) Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) dx$. **(6 pts)**

Pour tout $x \in [-1,1]$, on pose $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. La fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Comme f' s'annule sur **l'intervalle** $]-1,1[$, on en déduit que f est constante sur $]-1,1[$. Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = f(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Enfin, $f(-1) = \arccos(-1) + \arcsin(-1) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ et de même $f(1) = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, on a bien l'égalité voulue sur $[-1,1]$. Alors,

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) dx = \int_{-1}^{1} \arcsin x dx = 0}$$

car arcsin est impaire.

3) On pose $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$. On admettra qu'il existe des réels a, b, c, d tels que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

Déterminer ces réels et en déduire une primitive de f sur $]1,+\infty[$. **(6 pts)**

On a $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}$. Pour déterminer b, on multiplie par $(x-1)^2$ et on remplace x par 1 : on obtient

$$\frac{1}{(1+1)^2} = 0 + b + 0 + 0$$

donc $\boxed{b = \dfrac{1}{4}}$. De même, on trouve $d = \dfrac{-1}{(-1-1)^2}$, donc $\boxed{d = -\dfrac{1}{4}}$. Ensuite, on multiplie par $x+1$ et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = a + 0 + c + 0$, donc $a + c = 0$. Enfin, en évaluant en $x = 0$, on déduit que

$$0 = -a + b + c + d = -a + c$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} c = 0 \\ a = 0 \end{cases}}$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

Donc une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)}$$

Exercice 2 (19 pts)

On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E): \quad xy' = x + y$$

1) Résoudre (E) sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. **(7 pts)**

Sur I_1, (E) peut se réécrire

$$y' - \frac{y}{x} = 1$$

L'équation homogène associée est $y' - \dfrac{y}{x} = 0$, dont les solutions sont :

$$y_H(x) = Ce^{-(-\ln|x|)} = C|x| = -Cx \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

($y_H(x) = Cx$ marche aussi, c'est équivalent car C parcourt $\mathbb{R}$). Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On pose

$$y_p(x) = -C(x)x$$

Alors, y_p est solution de (E) sur I_1 si et seulement si

$$\begin{aligned} & y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x} = 1 \\ \iff & -C'(x)x - C(x) + C(x) = 1 \\ \iff & C'(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

On remarque que $C(x) = -\ln|x|$ convient. Ainsi, les solutions de (E) sur I_1 sont

$$\boxed{y(x) = x\ln|x| - Cx \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

Sur I_2, (E) se réécrit de la même façon. Les solutions de l'équation homogène sont alors

$$y_H(x) = De^{-(-\ln|x|)} = D|x| = Dx \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = D(x)x$. On trouve que y_p est solution si et seulement si

$$D'(x) = \frac{1}{x}$$

donc $D(x) = \ln|x|$ convient. Ainsi, les solutions de (E) sur I_2 sont

$$\boxed{y(x) = x\ln|x| + Dx \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}}$$

On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ en procédant par analyse-synthèse. Soit donc $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). En particulier, $y|_{\mathbb{R}_-^*}$ est solution de (E) sur I_1 et $y|_{\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (E) sur I_2.

2) Montrer que $y(0) = 0$. **(2 pts)**

En évaluant l'équation (E) en $x = 0$, on trouve $0 = 0 + y(0)$, donc $y(0) = 0$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x)$. **(2 pts)**

Par la question 1, on sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$

$$y(x) = x\ln|x| - Cx$$

Or, par croissance comparées, $x\ln|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc par somme y admet une limite en 0^- :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} y(x) = 0 - 0 = 0}$$

De même, on trouve que $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = 0}$.

4) Montrer que y est continue. **(3 pts)**

Par les questions 1 et 2, il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(x) = \begin{cases} x\ln|x| - Cx & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\ln|x| + Dx & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Il est clair que y est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ par somme, produit et composées de fonctions continues sur ces ensembles. De plus, par la question 3, $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = y(0)$ donc y est continue en 0. Ainsi, y est continue.

5) Est-ce que y est dérivable ? **(3 pts)**

Montrons que y n'est pas dérivable en 0 : en effet, pour tout $x > 0$,

$$\frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \ln|x| + D \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

donc y n'est pas dérivable en 0. Ainsi, $\boxed{y \text{ n'est pas dérivable}}$.

6) Conclure. **(3 pts)**

Supposons par l'absurde que (E) admette une solution y. Par définition, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad xy'(x) = x + y(x)$$

Or, par la question 5, toute solution y de l'équation (E) est nécessairement non dérivable en zéro. Ainsi, y ne peut être une solution de (E). Contradiction. Ainsi, (E) n'admet aucune solution.

Exercice 3 (19 pts)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$ **(5 pts)**

L'intervalle de définition est $\mathbb{R}$ car pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + e^t > 0$.
L'équation homogène est $y' + y = 0$. Les solutions de cette équation sont

$$y_H(t) = Ce^{-t} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière par la variation de la constante. On pose

$$y_p(t) = C(t)e^{-t}$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_p \in \mathcal{S} &\iff y_p' + y_p = \frac{1}{1+e^t} \\ &\iff C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t} \\ &\iff C'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \end{aligned}$$

Ainsi, $C(t) = \ln(1+e^t)$ convient. Finalement $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{y(x) = \ln(1+e^t)e^{-t} + Ce^{-t} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

2) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ **(6 pts)**

L'intervalle de définition est $\mathbb{R}$.
L'équation homogène est $y'' - 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

c'est-à-dire $(r-1)^2 = 0$. Ainsi, 1 est racine double de l'équation, si bien que les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(t) = (A + Bt)e^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = at + b \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Alors, y_p est solution de $y'' - 2y' + y = t$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & y_p'' - 2y_p' + y_p = t \\ \iff & 0 - 2a + (at + b) = t \\ \iff & at + b - 2a = t \end{aligned}$$

On en déduit que $a = 1$ et $b = 2$ conviennent, de sorte que $y_p(t) = t + 2$ est solution particulière. Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$y(x) = t + 2 + (A + Bt)e^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Trouvons A, B tels que y est solution du problème de Cauchy.

$$0 = y(0) = 2 + A \implies A = -2$$

et

$$y'(t) = 1 - 2e^t + Be^t + Bte^t$$

donc

$$0 = y'(0) = 1 - 2 + B$$

si bien que $B = 1$. Finalement

$$\boxed{y(t) = t + 2 + (t-2)e^t}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy.

3) $y'' - 2y' + y = \sin^2 t$ **(8 pts)**

L'intervalle de définition est $\mathbb{R}$.

Par la question 2, les solutions de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont

$$y_H(t) = (A + Bt)e^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière. Comme $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2t))$, on cherche d'abord une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = 1$$

et on trouve de manière évidente $y_{p,1}(t) = 1$. Ensuite, on cherche une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = \cos(2t)$$

On pose pour cela

$$y_{p,2}(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) \qquad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Alors,

$$\begin{aligned} y'_{p,2}(t) &= -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t) \\ y''_{p,2}(t) &= -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t) \end{aligned}$$

Ainsi, $y_{p,2}$ est solution particulière si et seulement si

$$\begin{aligned} & y''_{p,2} - 2y'_{p,2} + y_{p,2} = \cos(2t) \\ \iff & -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t) - 2\left(-2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)\right) + \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) = \cos(2t) \\ \iff & (-4\lambda - 4\mu + \lambda)\cos(2t) + (-4\mu + 4\lambda + \mu)\sin(2t) = \cos(2t) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit d'avoir

$$\begin{cases} -3\lambda - 4\mu = 1 \\ -3\mu + 4\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -16\mu - 9\mu = 4 \\ -3\mu + 4\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = -\dfrac{4}{25} \\ 4\lambda = 3\mu \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = -\dfrac{4}{25} \\ \lambda = -\dfrac{3}{25} \end{cases}$$

Ainsi,

$$y_{p,2}(t) = -\frac{3}{25}\cos(2t) - \frac{4}{25}\sin(2t)$$

convient. Par le principe de superposition, une solution particulière de $y'' - 2y' + y = \sin^2 t$ est

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{2} y_{p,1}(t) - \frac{1}{2} y_{p,2}(t) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{25}\cos(2t) - \frac{4}{25}\sin(2t)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2t) + \frac{2}{25}\sin(2t) \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2t) + \frac{2}{25}\sin(2t) + (A + Bt)e^t \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

Exercice 4 (16 pts)

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} \leq \frac{2a_{n+1}+3a_n}{8}$$

On veut montrer que cette suite tend vers 0.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}+3u_n}{8}$.
Exprimer le terme général u_n en fonction de a_0, a_1. **(6 pts)**

L'équation caractéristique associée est $r^2 = \dfrac{2}{8}r + \dfrac{3}{8}$, c'est-à-dire

$$8r^2 - 2r - 3 = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = 4 - 4 \times (-3) \times 8 = 4 + 12 \times 8 = 4 + 96 = 100 > 0$$

Donc l'équation admet deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{2+\sqrt{100}}{2\times 8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$r_2 = \frac{2-10}{2\times 8} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

Alors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

Or,

$$a_0 = u_0 = A + B$$

$$a_1 = u_1 = \frac{3}{4}A - \frac{1}{2}B$$

Ainsi,

$$\begin{cases} A+B = a_0 \\ \dfrac{3}{4}A - \dfrac{1}{2}B = a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B = a_0 \\ \dfrac{A}{2} + \dfrac{3}{4}A = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B = a_0 \\ \dfrac{5}{4}A = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{a_0}{2} + a_1\right) = \dfrac{2}{5}(a_0 + 2a_1) \\ B = a_0 - A = \dfrac{3}{5}a_0 - \dfrac{4}{5}a_1 \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{u_n = \left(\frac{2}{5}a_0 + \frac{4}{5}a_1\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{5}a_0 - \frac{4}{5}a_1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. **(2 pts)**

Comme $\left|\dfrac{3}{4}\right| < 1$ et $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$, on en déduit que $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \to 0$ et $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$. Par somme, $u_n \to 0$.

3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n \leq u_n$. **(6 pts)**

On montre ce résultat par récurrence double sur n.
Initialisation : pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est immédiat car $u_0 = a_0 \geq 0$ et $u_1 = a_1 \geq 0$.
Hérédité : supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq a_n \leq u_n$ et $0 \leq a_{n+1} \leq u_{n+1}$. Montrons que $0 \leq a_{n+2} \leq u_{n+2}$.
Comme (a_n) est une suite positive, on a déjà $a_{n+2} \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq \frac{2a_{n+1}+3a_n}{8} \\ &\leq \frac{2u_{n+1}+3u_n}{8} \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= u_{n+2} \end{aligned}$$

D'où le résultat est vrai au rang $n+2$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq u_n$.

4) Conclure. **(2 pts)**

Par la question 2, $u_n \to 0$, et par ailleurs, $0 \to 0$. Par la question 3 et le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{a_n \to 0}$.

Exercice 5 (16 pts)

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

1) Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. **(3 pts)**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & f'(x) > 0 \\ \iff & \frac{1}{2} > \frac{a}{2x^2} \\ \iff & x^2 > a && \text{car } x^2 > 0 \\ \iff & x > \sqrt{a} && \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, le tableau de f est le suivant :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\frac{a}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, par somme, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Comme $\frac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{a}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, car $a > 0$, par somme , $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2) Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \sqrt{a}$. **(3 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x_n = f(x_{n-1})$. Or, par la question 1, pour tout $x > 0$, on a $f(x) \geq \sqrt{a}$. Ainsi, $x_n \geq \sqrt{a}$.

3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right)$. **(2 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = -\frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \boxed{\frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right)}$$

4) En déduire que (x_n) converge vers $\sqrt{a}$. **(8 pts)**

Soit $n \in \boxed{\mathbb{N}^*}$. Par la question 2, on a $a - x_n^2 \leq 0$, et donc par la question 3,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right) \leq 0$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Comme elle est minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$.
Montrons que $\ell = \sqrt{a}$. Comme $\ell \geq \sqrt{a}$, on a $\ell > 0$, et donc $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{\ell}$. Ainsi, en passant à la limite dans

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right)$$

on obtient par somme et produit,

$$\ell - \ell = \frac{1}{2\ell}\left(a - \ell^2\right)$$

et donc $a - \ell^2 = 0$, si bien que $\ell = \sqrt{a}$. D'où $\boxed{x_n \to \sqrt{a}}$.

Exercice 6 (35 pts)

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. **(8 pts)**

Démontrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Si $n = 0$, alors

$$c_0 = 0 = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2^{0+1}}$$

donc le résultat est vrai au rang 0.
Supposons que $c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons-le au rang $n+1$. Par définition de (c_n),

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right|$$

Or, $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \geq 0$. Ainsi, $c_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. Le résultat est donc vrai au rang $n+1$.
Ainsi, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_0 = 2 \qquad S_n = \frac{S_{n-1}}{c_n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{S_n}{c_n}$$

2) Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ? **(12 pts)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 1,

$$c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

et comme $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $c_n \in]0,1[$. En particulier, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont bien définies. Comme $S_0 > 0$ et $c_n > 0$, on montre par récurrence immédiate que $S_n > 0$, et de même que $T_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{1}{c_n} \geq 1$$

donc (S_n) est croissante. Par ailleurs,

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{\frac{S_{n+1}}{c_{n+1}}}{\frac{S_n}{c_n}} = \frac{S_{n+1}}{S_n} \times \frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{1}{c_{n+1}} \times \frac{c_n}{c_{n+1}}$$

Or, $c_{n+1}^2 = \frac{1+c_n}{2}$, donc

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{c_n}{\frac{1+c_n}{2}}$$

Comme $c_n < 1$, on a $\frac{1+c_n}{2} > c_n$, si bien que $\frac{T_{n+1}}{T_n} < 1$. D'où $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Enfin, montrons que $S_n - T_n \to 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - T_n = T_n\left(c_n - 1\right)$$

D'une part, comme $\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \to 0$, on a par continuité de cos que $c_n \to 1$, si bien que $c_n - 1 \to 0$. D'autre part, (T_n) est décroissante et positive donc $0 \leq T_n \leq T_1$: la suite (T_n) est bornée. Ainsi, $T_n(c_n - 1) \to 0$. On a donc bien montré que les suites (S_n) et (T_n) sont adjacentes.

On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. **(8 pts)**

Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, c'est clair car

$$\begin{cases} S_0 = 2 \\ 2^{0+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{0+1}}\right) = 2 \sin \dfrac{\pi}{2} = 2 \end{cases}$$

On suppose le résultat vrai pour un $n \in \mathbb{N}$. Montrons-le au rang $n+1$. Par définition de (S_n),

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{S_n}{c_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \qquad \text{par la question 1 et l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} \times 2^{n+1} \times 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= 2^{n+2} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

Finalement, le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En utilisant le fait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, en déduire la limite de (S_n). **(7 pts)**

Comme $\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \to 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, on a par composition de limites :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\frac{\pi}{2^{n+2}}} \to 1$$

ce qui équivaut à

$$\frac{1}{\pi} 2^{n+2} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \to 1$$

ou encore

$$\frac{1}{\pi} S_n \to 1$$

Ainsi, $\pi \times \dfrac{1}{\pi} S_n \to \pi$, ou encore $\boxed{S_n \to \pi}$.