DS n°3 : Applications, fonctions, intégration

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice

1) Calculer $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$. **(/3)**

(on remarque qu'on est sous la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u = \ln$)

$$I = [\ln |\ln x|]_e^{e^2} = \ln \left|\ln(e^2)\right| - \ln |\ln e| = \ln |2 \ln e| - \ln 1 = \boxed{\ln 2}$$

2) En utilisant le changement de variable $x = \tan t$, calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ **(/5)**

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \tan t \\ dx &= (1+\tan^2 t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} (1 + \cos(2t))\, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{2} - 0 \right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

3) Soient $a, b \in]-1, 1[$. Trouver une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_a^b \arcsin x dx = [F(x)]_a^b$$

En déduire les primitives de arcsin sur $[a, b]$. **(/5)**

$$\begin{aligned} \int_a^b \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= [x \arcsin x]_a^b + \int_a^b \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= [x \arcsin x]_a^b + \left[\sqrt{1-x^2} \right]_a^b \\ &= \left[x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right]_a^b \end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème fondamental de l'analyse, les primitives de arcsin sur $[a, b]$ sont les fonctions

$$\boxed{x \mapsto x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}}$$

4) On définit l'application

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

Montrer que f n'est ni injective, ni surjective. **(/6)**

On a $f(2) = 2 + \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$ donc f n'est pas injective.
Résolvons l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:

$$x + \frac{1}{x} = 0 \iff x^2 + 1 = 0$$

Comme $x^2 + 1 \geq 1$, il n'y a pas de solution. Ainsi $0 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent par f et donc f n'est pas surjective.

Problème 1

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

1)

a) Déterminer le domaine de définition D de f et g. **(/2)**

Pour f, arctan et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ par composition.

Pour g, ch est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}$ a un sens car $1 + \mathrm{ch}(x) \geq 2 > 0$. Par composition, g est définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $\boxed{D = \mathbb{R}}$

b) Montrer que f et g sont dérivables sur D. Calculer f' et g'. **(/5)**

f et g sont dérivables sur D comme composition et quotient de fonctions dérivables sur D. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2 x}\mathrm{ch}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\mathrm{ch}x = \boxed{\frac{1}{2\mathrm{ch}x}}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}\right)^2} \times \frac{\mathrm{ch}x(1+\mathrm{ch}x) - \mathrm{sh}^2 x}{(1+\mathrm{ch}x)^2} \\
&= \frac{1}{(1+\mathrm{ch}x)^2 + (\mathrm{sh}x)^2} \times \left(\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x\right) \\
&= \frac{1}{1 + 2\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x} \times (\mathrm{ch}x + 1) \\
&= \frac{1}{1 + 2\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}^2 x + (\mathrm{ch}^2 x - 1)} \times (\mathrm{ch}x + 1) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{ch}x + 2\mathrm{ch}^2 x} \times (\mathrm{ch}x + 1) \\
&= \boxed{\frac{1}{2\mathrm{ch}x}}
\end{aligned}$$

c) En déduire le résultat voulu. **(/5)**

Par la question précédente, $f' = g'$, ou encore $(f-g)' = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f - g = C$.

Pour montrer que $f = g$, il suffit de montrer que $C = 0$. Or,

$$C = f(0) - g(0) = \frac{1}{2}\arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 - 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{f = g}$.

2)

a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction tan. **(/1)**

$$\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2f(x))$. **(/5)**

Soit $x \in D$. On a $2f(x) = \arctan(\text{sh}x)$. Or, $\arctan(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $2f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset E$. Ainsi, $\boxed{2f(x) \in E}$, et

$$\begin{aligned}
\tan(2f(x)) &= \tan(\arctan(\text{sh}x)) \\
&= \boxed{\text{sh}x}
\end{aligned}$$

c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\text{sh}(x)}{1+\text{ch}(x)}$ est à valeurs dans $]-1,1[$. **(/6)**

On sait que $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}} : \mathbb{R} \to]-1,1[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}\right| \leq \left|\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right| < 1$$

on en déduit que $h(x) \in]-1,1[$.

d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2g(x))$. **(/8)**

Par la question (c), on a pour tout $x \in D$

$$\begin{aligned}
&-1 < h(x) < 1 \\
\Longrightarrow\ &-\frac{\pi}{4} < \arctan(h(x)) = g(x) < \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \text{par stricte croissance de } \arctan \\
\Longrightarrow\ &-\frac{\pi}{2} < 2g(x) < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\tan(2g(x)) &= \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2 g(x)} \qquad\qquad (\text{formule } \tan(a+b) \text{ avec } b = a) \\
&= \frac{2\frac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}}{1-\left(\frac{\text{sh}x}{1+\text{ch}x}\right)^2} \\
&= \frac{2\text{sh}x(1+\text{ch}x)}{(1+\text{ch}x)^2 - \text{sh}^2x} \\
&= \frac{2\text{sh}x + 2\text{sh}x\text{ch}x}{1+2\text{ch}x+\text{ch}^2x-\text{sh}^2x} \\
&= 2\text{sh}x\frac{1+\text{ch}x}{2+2\text{ch}x} \\
&= \boxed{\text{sh}x}
\end{aligned}$$

e) En déduire le résultat voulu. **(/6)**

Soit $x \in D$. Par les questions (c) et (d), on a

$$\begin{aligned}
& \tan(2f(x)) = \tan(2g(x)) \\
\Longrightarrow\ & \arctan(\tan(2f(x))) = \arctan(\tan(2g(x))) \\
\Longrightarrow\ & 2f(x) = 2g(x) && \text{car } 2f(x), 2g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\
\Longrightarrow\ & f(x) = g(x)
\end{aligned}$$

Ainsi $f = g$. *Note : on aurait aussi pu raisonner avec le fait que* $\tan a = \tan b \iff a \equiv b \quad [\pi]$.

3) Application :

a) Calculer $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$. **(/2)**

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} + e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3+1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) &= \frac{e^{\frac{1}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

b) En appliquant l'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \frac{1}{2}\ln(3)$, calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$. **(/4)**

On pose $x = \frac{1}{2}\ln 3$. Alors, par la question (a),

$$\begin{aligned}
& f(x) = g(x) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}\right) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right) \in E \\
\Longrightarrow\ & \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+2}\right)\right) \\
\Longrightarrow\ & \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+2}}
\end{aligned}$$

Problème 2

1) Soit $\preceq$ une relation binaire sur un ensemble E. Rappeler la définition de "$\preceq$ est une relation d'ordre sur E". **(/2)**

$\preceq$ est une relation d'ordre sur E si elle est

- réflexive : $\forall x \in E \quad x \preceq x$
- antisymétrique : $\forall x, y \in E \quad (x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq x) \Longrightarrow x = y$
- transitive : $\forall x, y, z \in E \quad (x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq z) \Longrightarrow x \preceq z$

2) Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $f : E \to E$ une application et $\lhd$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall x, y \in E \qquad x \lhd y \iff f(x) \preceq f(y)$$

a) Démontrer que $\lhd$ est réflexive et transitive. **(/4)**

Soient $x, y, z \in E$.

- Comme $\preceq$ est réflexive, on a $f(x) \preceq f(x)$, donc $x \lhd x$. Ainsi $\lhd$ est réflexive.
- Supposons $x \lhd y$ et $y \lhd z$. Alors $f(x) \preceq f(y)$ et $f(y) \preceq f(z)$. Comme $\preceq$ est transitive, on a $f(x) \preceq f(z)$, c'est-à-dire $x \lhd z$. Ainsi, $\lhd$ est transitive.

b) Démontrer que $\lhd$ est une relation d'ordre si et seulement si f est injective. **(/8)**

On raisonne par double implication.

- Supposons f injective et montrons que $\lhd$ est antisymétrique. Soient $x, y \in E$ tels que $x \lhd y$ et $y \lhd x$. Alors $f(x) \preceq f(y)$ et $f(y) \preceq f(x)$. Comme $\preceq$ est antisymétrique, on en déduit que $f(x) = f(y)$. Comme f est injective, on déduit que $x = y$. Ainsi, $\lhd$ est antisymétrique. Comme $\lhd$ est aussi réflexive et transitive par la question (b), on en déduit que $\lhd$ est une relation d'ordre.
- Supposons que $\lhd$ est une relation d'ordre et montrons que f est injective. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors, comme $\preceq$ est réflexive, on a $f(x) \preceq f(y)$ et $f(y) \preceq f(x)$, c'est-à-dire $x \lhd y$ et $y \lhd x$. Or, $\lhd$ et une relation d'ordre, donc $x = y$. Ainsi, par arbitraire sur x, y, on en déduit que f est injective.

c) Rappeler la définition de "$\preceq$ définit un ordre total". **(/1)**

$\preceq$ définit un ordre total si

$$\forall x, y \in E \qquad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x$$

d) On suppose f bijective. Démontrer que $\lhd$ définit un ordre total si et seulement si $\preceq$ définit un ordre total. **(/10)**

On procède par double implication.

- Supposons que $\lhd$ définit un ordre total. Montrons qu'il en va de même pour $\preceq$. Soient $x, y \in E$. Alors en posant $x' = f^{-1}(x) \in E$ et $y' = f^{-1}(y) \in E$, comme $\lhd$ définit un ordre total, on a $x' \lhd y'$ ou $y' \lhd x'$, c'est-à-dire $f(x') \preceq f(y')$ ou $f(y') \preceq f(x')$, ou encore $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.
- Supposons que $\preceq$ définit un ordre total. Montrons qu'il en va de même pour $\lhd$. Soient $x, y \in E$. Comme $f(x), f(y) \in E$ et que $\preceq$ définit un ordre total, $f(x) \preceq f(y)$ ou $f(y) \preceq f(x)$, c'est-à-dire $x \lhd y$ ou $y \lhd x$.

3) Rappel : on définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation de divisibilité $|$ par

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* \qquad m|n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad n = km$$

a) Montrer que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. **(/6)**

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

- On a $x = 1 \times x$ avec $1 \in \mathbb{N}^*$, donc $x|x$. Ainsi $|$ est réflexive.
- Supposons que $x|y$ et $y|x$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$y = kx$$

$$x = k'y$$

Comme $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k \geq 1$, et comme $x \geq 0$, on obtient $kx \geq x$, donc $y \geq x$. On montre de même que $y \leq x$. D'où $x = y$. Ainsi $|$ est antisymétrique.

- Supposons que $x|y$ et $y|z$. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$y = kx$$
$$z = k'y$$

si bien que $z = k'kx$. Comme $k'k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $x|z$. Donc $|$ est transitive.

Finalement, $|$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que $|$ définit un ordre total ? **(/1)**

Non : il est clair que 2 et 3 ne sont pas en relation par $|$.

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit $\leqq$ une autre relation d'ordre sur E. On dit que "$\leqq$ est un **prolongement** de $\preceq$ sur E" si

$$\forall x, y \in E \qquad x \preceq y \implies x \leqq y$$

4) Montrer que la relation d'ordre usuelle $\leq$ est un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}^*$. **(/2)**

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x|y$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = kx$. Comme $k \geq 1$, on a $y = kx \geq x$. Ainsi $x|y \implies x \leq y$. Par arbitraire sur x, y, on a le résultat voulu.

Rappel : on définit sur $\mathbb{N}$ la relation de divisibilité $|$ par

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \qquad m|n \iff \exists k \in \mathbb{N} \quad n = km$$

On admettra que $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

5) Est-ce que la relation d'ordre usuelle $\leq$ est un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}$? **(/3)**

Supposons par l'absurde que $\leq$ soit un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}$. Comme $0 = 0 \times 1$, on a $1|0$. Par hypothèse, on aurait alors $1 \leq 0$. Contradiction.
Ainsi, la relation $\leq$ n'est pas un prolongement de $|$ sur $\mathbb{N}$.