DS n°2 : corrigé (22 points, ramené / 20)

(...) signifie ou bien que vous avez oublié des parenthèses essentielles, ou bien que ce passage était inutile (récitation du cours, de l'énoncé ...).

NI : non introduit : à côté sont entourées une ou plusieurs variables qui n'ont pas été introduites.

CQVD : ce qu'on veut démontrer. Vous n'avez pas mis "montrons que" avant pour *annoncer* cette assertion plutôt que *l'affirmer* (cf chapitre 0). C'est encore plus grave si vous vous en êtes servi comme d'une assertion vraie dans votre raisonnement : vous êtes alors parti de ce que vous voulez démontrer.

Exercice 1 (/ 6)

On pose $E = \mathbb{C} \backslash \{1\}$ et

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z-1}{1-\overline{z}} \end{aligned}$$

1) (/0,75) Montrer que $\forall z \in E \quad |f(z)| = 1$.

Soit $z \in E$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Alors :

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-1|^2}{|1-\overline{z}|^2} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{(1-a)^2 + (-b)^2} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} = 1$$

donc $|f(z)| = 1$ car un module est toujours positif. *(On pouvait aussi utiliser le fait que* $|1 - \overline{z}| = \left|\overline{(1-\overline{z})}\right| = |1 - z| = |z - 1|$*)*

2) (/1) Résoudre l'équation $f(z) = 1$ d'inconnue $z \in E$.

Soit $z \in E$.

$$\begin{aligned} f(z) = 1 &\iff \frac{z-1}{1-\overline{z}} = 1 \\ &\iff z - 1 = 1 - \overline{z} \\ &\iff z + \overline{z} = 2 \\ &\iff 2\text{Re}z = 2 \\ &\iff \text{Re}z = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S = \{z \in E \mid \text{Re}z = 1\} = \{1 + ib \mid b \in \mathbb{R}^*\}}$.

3) (/1,5) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.

Par la question 2), comme $\text{Re}(1+i) = \text{Re}(1-i) = 1$, on a

$$f(1+i) = 1 = f(1-i)$$

Or, $1 + i \neq 1 - i$. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective}}$.

Par la question 1), pour tout $z \in E$ on a $f(z) \in \mathbb{U}$. Ainsi, on voit par exemple que le complexe $y = 2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ ne peut pas avoir d'antécédent par f. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective}}$.

4) (/1) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que $f(e^{i\,\theta}) = e^{i\,\theta}$.

Tout d'abord, comme $\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$, on déduit que $e^{i\,\theta} \neq 1$. Ainsi, $e^{i\,\theta} \in E$ et $f(e^{i\,\theta})$ a un sens. Ensuite,

$$\begin{aligned} f(e^{i\,\theta}) &= \frac{e^{i\,\theta} - 1}{1 - e^{-i\,\theta}} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\,\frac{\theta}{2}} - e^{-i\,\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{-i\,\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\,\frac{\theta}{2}} - e^{-i\,\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= \frac{e^{i\,\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\,\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\,\theta} \end{aligned}$$

5) (/1,75) En déduire que $f(E) = \mathbb{U}$.

On procède par double inclusion. Montrons que $f(E) \subset \mathbb{U}$. Soit $y \in f(E)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$. Par la question 1), on en déduit que $|y| = 1$, donc $y \in \mathbb{U}$. Ainsi par arbitraire sur y, $\boxed{f(E) \subset \mathbb{U}}$.

Réciproquement, montrons que $\mathbb{U} \subset f(E)$. Soit $y \in \mathbb{U}$. Alors par définition, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $y = e^{i\,\theta}$.

- Si $\theta \neq 0$, alors par la question 4), $y = e^{i\,\theta} = f(e^{i\,\theta})$ donc $y \in f(E)$.
- Si $\theta = 0$, alors $y = 1$ et par la question 2), on a par exemple $y = 1 = f(1 + i)$, donc $y \in f(E)$.

Finalement par arbitraire sur y, on a bien $\boxed{\mathbb{U} \subset f(E)}$. D'où le résultat.

Exercice 2 (/3,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les expressions suivantes :

1) (/0,75) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{k-1}}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{2^{k-1}} &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k \\ &= 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n}{-\frac{1}{2}} \\ &= -6\left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

2) (/0,75) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{1} (k + j)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{1} (k + j) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\frac{2n+4}{3}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

6) **(/2)** Pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ *(Le résultat final ne doit contenir aucun* $\sum$*, Re, Im...)*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Re}\left(e^{i\,kx}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{i\,x}\right)^k\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[(1+e^{i\,x})^n\right] && \text{par la formule du binôme} \\
&= \mathrm{Re}\left[(e^{i\,\frac{x}{2}}(e^{-i\,\frac{x}{2}}+e^{i\,\frac{x}{2}}))^n\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[e^{i\,n\,\frac{x}{2}}\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n\right] \\
&= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \mathrm{Re}\left(e^{i\,n\,\frac{x}{2}}\right) \\
&= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)
\end{aligned}$$

Problème (/12,5)

L'objectif de ce problème est de déterminer deux valeurs exactes, pour $n=8$ et $n=12$, du nombre réel défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\alpha_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

On montre ensuite une propriété de α_7.

Calcul de α_{12}. On considère les deux nombres complexes

$$p = \sqrt{3} - i \quad \text{et} \quad q = pe^{i\,\frac{\pi}{4}}$$

1) **(/1,25)** Déterminer les formes exponentielles de p et q.

Tout d'abord,

$$|p| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Ensuite

$$\frac{p}{|p|} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Cherchons $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La première équation entraine $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ *(CAR ON A SUPPOSÉ $\theta \in]-\pi,\pi]$...).* Comme $\sin\theta < 0$, on en déduit $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$. Donc $\boxed{p = 2e^{-i\,\frac{\pi}{6}}}$

Ensuite, par ce qui précède, $q = pe^{i\,\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\,\frac{\pi}{4}}e^{-i\,\frac{\pi}{6}} = \boxed{2e^{i\,\frac{\pi}{12}} = q}$

2) **(/1,25)** En utilisant la forme algébrique de $e^{i\,\frac{\pi}{4}}$, en déduire que

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

Tout d'abord,

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ensuite, par la question 1), on a

$$\begin{aligned} q &= pe^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\sqrt{3} - i\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$q = 2e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

d'où l'égalité recherchée.

3) (/0,5) En déduire la valeur de α_{12}.

On passe à la partie réelle dans l'égalité prouvée à la question 3). On obtient

$$2\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et ainsi $\boxed{\alpha_{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}}$

Calcul de α_8. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 = 1 + i$$

dont on note S l'ensemble des solutions.

4) (/1,25) Mettre $1+i$ sous forme exponentielle puis déterminer les éléments de S sous forme exponentielle.

$|1+i| = \sqrt{2}$ et on remarque que *(à ce stade, si la 1) a été bien faite, on a la confiance du correcteur et on peut gagner du temps :)*

$$\frac{1+i}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

si bien que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Alors,

$$z^2 = 1 + i \iff z^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et donc les solutions sont $\boxed{S = \left\{2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}, 2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{9\pi}{8}}\right\}}$

5) (/1,5) Résoudre à nouveau l'équation en cherchant les solutions sous forme algébrique. En déduire une autre expression de S.

On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $z^2 = 1 + i$ entraîne

$$\begin{cases} 1 = \mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2 \\ \sqrt{2} = |z^2| = a^2 + b^2 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ b^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}$$

Posons $a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} > 0$. Alors comme $\mathrm{Im}(1+i) = 1 = 2ab$, on en déduit que $b > 0$, si bien que $b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Ainsi, en posant $\omega = a + ib = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$

$$\boxed{S = \{\omega, -\omega\}}$$

6) (/1.75) Conclure que

$$\alpha_8 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Par ce qui précède, on a $S = \left\{2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}, 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}\right\} = \{\omega, -\omega\}$. Donc $\omega = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $\omega = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}$. Or on a vu que $\mathrm{Re}\omega > 0$, tandis que

$$\mathrm{Re}\left(2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}\right) = 2^{\frac{1}{4}} \cos\frac{9\pi}{8} = -2^{\frac{1}{4}} \cos\frac{\pi}{8} \leq 0 \qquad \text{car } \frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi, $\omega \neq 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{9\pi}{8}}$. Finalement $\omega = 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}$ et en passant aux parties réelles,

$$2^{\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Calcul de α_7. On considère le polynôme de la variable complexe $\Phi(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ et on pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{7}}$.

7) (/1,5) Justifier que $\Phi(\omega) = 0$ et que $\omega + \dfrac{1}{\omega} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

On a $\omega \neq 1$ car $\dfrac{2\pi}{7} \not\equiv 0 \quad [2\pi]$, donc

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = \frac{1-e^{i\,2\pi}}{1-\omega} = \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

Par ailleurs

$$\omega + \frac{1}{\omega} = e^{2i\frac{\pi}{7}} + e^{-2i\frac{\pi}{7}} = 2\mathrm{Re}\left(e^{2i\frac{\pi}{7}}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

8) (/1,5) Montrer que

$$\omega^{-3}\Phi(\omega) = \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^3 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1$$

Par la formule du binôme,

$$\left(\omega+\omega^{-1}\right)^3 = \omega^3+3\omega+3\omega^{-1}+\omega^{-3}$$
$$\left(\omega+\omega^{-1}\right)^2 = \omega^2+2+\omega^{-2}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\left(\omega+\omega^{-1}\right)^3+\left(\omega+\omega^{-1}\right)^2-2\left(\omega+\omega^{-1}\right)-1\\
=&\omega^3+3\omega+3\omega^{-1}+\omega^{-3}+\omega^2+2+\omega^{-2}-2\omega-2\omega^{-1}-1\\
=&\omega^3+\omega^2+\omega+1+\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega^{-3}\\
=&\sum_{k=-3}^{3}\omega^k=\omega^{-3}\sum_{k=0}^{6}\omega^k=\omega^{-3}\Phi(\omega)
\end{aligned}$$

9) (/0,75) En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est une racine du polynôme $\Theta(z)=z^3+z^2-2z-1$.

Par les questions 7) et 8), *(il faut écrire ça pour justifier la suite !)*

$$\Theta\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)=\omega^{-3}\Phi(\omega)=0$$

et donc $\omega+\frac{1}{\omega}=2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est une racine de Θ

On admettra dans la suite que Θ admet une unique racine réelle positive, que l'on note β. *Note : ceci signifie que Θ que β est la seule racine dans $\mathbb{R}_+$. Tout le monde a supposé que cela signifie : β est la seule racine dans $\mathbb{R}$, et en plus $\beta\geq 0$. Ce n'est pas tout à fait pareil, mais je n'ai enlevé aucun point là-dessus.*

10) (/1,25) Exprimer α_7 en fonction de β.

Par la question 9), $2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est une racine réelle de Θ. C'est une racine positive, car $\frac{2\pi}{7}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Donc par unicité de la racine réelle positive de Θ, $\beta=2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Or,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)-1=2\alpha_7^2-1$$

Ainsi, $\beta=2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)=2\left(2\alpha_7^2-1\right)$, ce qui entraîne

$$\alpha_7^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\geq 0 \qquad (\text{car } \beta\geq 0)$$

Donc

$$\sqrt{\alpha_7^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}$$

Or, $\alpha_7=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)>0$ car $\frac{\pi}{7}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi

$$\boxed{\alpha_7=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right)}}$$