DS n°1 : corrigé (21 points, ramené / 20)

((...)) signifie que vous avez recopié l'énoncé : ne pas le faire pour gagner du temps.

(...) signifie ou bien que vous avez oublié des parenthèses essentielles, ou bien que ce passage était inutile (récitation du cours, ...).

NI : non introduit : à côté sont entourées une ou plusieurs variables qui n'ont pas été introduites.

CQVD : ce qu'on veut démontrer. Vous n'avez pas mis "montrons que" avant pour *annoncer* cette assertion plutôt que *l'affirmer* (cf chapitre 0). C'est encore plus grave si vous vous en êtes servi comme d'une assertion vraie dans votre raisonnement : vous êtes alors parti de ce que vous voulez démontrer.

Exercice 1 (/ 2,5)

1) **(/0,75)** Si $x = 0$, alors pour tout réel y, on a bien $x = 0 \leq |y|$. Donc la proposition est vraie.

2) **(/0,75)** La négation de cette proposition est :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$$

Or cette proposition est vraie : si $x = -1$, alors pour tout réel y, on a bien $y^2 \geq 0 > -1 = x$. Donc la proposition de départ est fausse.

3) **(/1)** Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Vérifions si la contraposée de l'implication est vraie :

$$x = y \implies x^2 = y^2$$

Il est clair que si x et y sont égaux, il en va de même de leurs carrés. Donc par contraposée, la proposition initiale est vraie.

Exercice 2 (/ 3)

1) **(/0.5)** Par construction,

$$u_2 = u_1 + 6u_0 = 7 + 6 \times 4 = 7 + 24 = 31$$

$$u_3 = u_2 + 6u_1 = 31 + 6 \times 7 = 31 + 42 = 73$$

2) **(/2.5)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H_n : u_n = (-2)^n + 3^{n+1}$. Montrons que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double sur n.

Initialisation : si $n = 0$

$$(-2)^0 + 3^{0+1} = 1 + 3 = 4 = u_0$$

Si $n = 1$

$$(-2)^1 + 3^{1+1} = -2 + 9 = 7 = u_1$$

donc H_0 et H_1 sont vraies.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose H_n et H_{n+1} vraies. Montrons que H_{n+2} l'est aussi. Par construction

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 6u_n \\ &= (-2)^{n+1} + 3^{n+2} + 6\left((-2)^n + 3^{n+1}\right) \qquad \text{(par } H_n \text{ et } H_{n+1}) \\ &= (-2)^n(-2+6) + 3^{n+1}(3+6) \\ &= (-2)^n \times 4 + 3^{n+1} \times 9 \\ &= (-2)^{n+2} + 3^{n+3} \end{aligned}$$

donc H_{n+2} est vérifiée.

Conclusion : H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (/ 3)

On procède par analyse-synthèse.

(/ 2,25) Analyse : soit f une fonction solution. Tout d'abord,

$$f(0-0) = 0 - f(0)$$

donc $2f(0) = 0$. On en déduit que $f(0) = 0$. Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x-0) = x - f(0)$$

c'est-à-dire $f(x) = x$. Ainsi, si f vérifie les conditions, alors $f(x) = x$.

(/ 0,75) Synthèse : vérifions si $f : x \mapsto x$ est effectivement solution. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x-y) = x - y = x - f(y)$$

et par conséquent elle vérifie bien l'équation.

Conclusion : $\boxed{\text{la seule solution de l'équation est la fonction } x \mapsto x.}$

Exercice 4 (/ 3,5)

1) **(/1)** Si $x = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$. Si $x \neq 1$, alors par somme des termes d'une suite géométrique,

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x}$$

2) **(/1)**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k-1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} j \\ &= \boxed{\frac{(n-1)n}{2}} \end{aligned}$$

3) **(/1,5)**

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{2k+2} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times \frac{k}{k+1} \right)$$
$$= \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n+1}} \qquad \text{(par télescopage)}$$

Problème court (/ 9)

1) **(/2)** Montrons que la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par récurrence sur k.

Initialisation : si $k = 1$, alors

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = \sum_{j=1}^{1} j^2$$

donc la propriété est vraie pour $k = 1$.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété vraie au rang k. Montrons qu'elle l'est au rang $k+1$.

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = (k+1)^2 + \sum_{j=1}^{k} j^2$$
$$= (k+1)^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$
$$= \frac{6(k+1)^2 + k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\left[6(k+1) + k(2k+1)\right]}{6}$$
$$= \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2) **(/1,5)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question 1,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
$$= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} (2k^3 + 3k^2 + k)$$
$$= \frac{1}{3} C_n + \frac{1}{2} B_n + \frac{1}{6} A_n$$

3) **(/2)**

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} j^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} j^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(j^2 \sum_{k=j}^{n} 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2 (n-j+1) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[(n+1)j^2 - j^3 \right] \\ &= (n+1)B_n - C_n \end{aligned}$$

4) **(/2)** Par les questions 2) et 3), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{3}C_n + \frac{1}{2}B_n + \frac{1}{6}A_n = S_n = (n+1)B_n - C_n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}C_n &= (n+1)B_n - \frac{1}{2}B_n - \frac{1}{6}A_n \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) B_n - \frac{1}{6}A_n \end{aligned}$$

Or, on a

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}C_n &= \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right) n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \times \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(2n+1) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \times \left[2n^2 + n + n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \times n\,(2n+2) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{3} \end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

5) **(/1,5)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant la relation admise pour k allant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4 \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \right]$$

et donc par télescopage,

$$(n+1)^4 - 1 = 4C_n + 6B_n + 4A_n + n$$

Ainsi

$$\boxed{C_n = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 1 - 6B_n - 4A_n - n \right]}$$