DS n°10 : matrices et algèbre linéaire, groupe symétrique, déterminants – Corrigé

Exercice 1 : Algèbre linéaire

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire sur f ?

On a $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$. Calculons $\operatorname{rg} A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - 3L_3 \\ L_2 + 3L_3 \\ \end{matrix}$$

Or, les vecteurs colonnes de cette matrice forment la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donc engendrent $\mathbb{R}^3$ tout entier. Ainsi, $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

On en déduit que f est surjective. Or, comme c'est un endomorphisme et que $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, cela implique que f est bijective.

2) Déterminer $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$, ainsi que sa dimension. Vérifier que $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ appartient à cet ensemble.

$f - \mathrm{id}$ a pour matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On détermine $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ par la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} \\ L_2 + 3L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{matrix} \\ \\ L_3 + L_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \quad \text{et} \quad y = -2z\} \\ &= \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}((1, -2, 1)) \end{aligned}$$

Comme la famille $((1, -2, 1))$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et qu'elle est libre (car le vecteur est non nul), c'est une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$. Donc

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = 1$$

Le vecteur

$$u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3 = (1, -2, 1)$$

appartient clairement à cette ensemble puisque $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(u_1)$.

3) On pose $u_2 = -e_2 + e_3$ et $u_3 = e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $u_2 = (0, -1, 1)$ et $u_3 = (0, 0, 1)$. On calcule

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times 1 = -1 \neq 0$$

donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

Par définition,

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, le calcul par la matrice augmentée donne (le détail doit apparaitre sur la copie) :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P$$

5) Soit A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

a) Après avoir rappelé la relation liant les matrices A et A', calculer A'.

(On ne détaille pas le calcul mais cela doit apparaitre sur la copie :)

$$A' = P^{-1}AP = PAP = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Pour tout entier naturel n, calculer $(A')^n$.

On peut écrire $A' = I_3 + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^3 = 0$$

Enfin, on a $I_3N = NI_3$ donc par la formule du binôme,

$$\begin{aligned} (A')^n &= (I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \end{aligned}$$

Discutons selon la valeur de n.

- Si $n = 0$, alors $(A')^n = I_3$ par convention.
- Si $n = 1$, alors $(A')^n = A'$.
- Si $n \geq 2$, alors comme $N^k = 0$ pour $k \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} (A')^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} + 0 \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 \\ &= I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Comme $A' = P^{-1}AP$ et que $P = P^{-1}$, on a

$$A = PA'P$$

donc

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(PA'P)(PA'P)\dots(PA'P)}_{n \text{ fois}} \\ &= P(A')^nP \end{aligned}$$

Le calcul donne

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n^2 + 3n + 2 & n(n+1) & n(n-1) \\ -2n(n+2) & 2 - 2n^2 & -2n(n+2) \\ n(n+1) & n(n-1) & n^2 - 3n + 2 \end{pmatrix}$$

6) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est P. Montrer que h est une symétrie par rapport à un espace E_1 et parallèlement à un espace E_2. On précisera les bases de E_1 et E_2.

On a $P^{-1} = P$ donc h est inversible et h^{-1} a la même matrice que h dans les bases canoniques : on en déduit que $h = h^{-1}$. Comme h est linéaire, cela entraine que h est une symétrie.

Par définition, h est une symétrie par rapport à $E_1 = \mathrm{Ker}\,(h - \mathrm{id})$ parallèlement à $E_2 = \mathrm{Ker}\,(h + \mathrm{id})$. Pour déterminer ces ensembles, on passe par la matrice P. Commençons par E_1 :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(P - I_3) &\iff (P - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff x + y = 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\right\} \\
&= \{(x, -x, z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,((1,-1,0),\ (0,0,1))
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\boxed{(1,-1,0),\ (0,0,1)}$ est une famille génératrice de E_1, et comme elle est libre (les deux vecteurs sont non colinéaires) c'est une base de E_1.

Pour E_2, le calcul donne :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(P + I_3) &\iff (P + I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ -2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y + z = 0\right\} \\
&= \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\,((0,1,-1))
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\boxed{(0,1,-1)}$ est une famille génératrice de E_2, et comme elle est libre (son unique vecteur étant non nul) c'est une base de E_2.

7) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de h dans la base $\mathcal{C}$ soit donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a

$$E_1 = \{u \in E \mid h(u) = u\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \{u \in E \mid h(u) = -u\}$$

Ainsi, si on pose

$$\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3) := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Par la question précédente, $u_1, u_2 \in E_1$ et $u_3 \in E_2$, donc

$$h(u_1) = u_1 \qquad h(u_2) = u_2 \qquad h(u_3) = -u_3$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Sur le groupe A_n

Dans cet exercice, on considère un entier $n \geq 5$. On note S_n le groupe symétrique d'ordre n, et pour deux permutations σ et τ de S_n, on notera $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$. On note A_n le sous-ensemble des permutations paires de S_n, i.e. dont la signature vaut 1.

1) On considère un p-cycle σ de S_n. À quelle condition est-ce que σ appartient à A_n ?

On a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{p-1}$,donc

$$\sigma \in A_n \iff \varepsilon(\sigma) = 1 \iff \boxed{p \in 2\mathbb{N}+1}$$

2) Montrer que A_n est un sous-groupe de S_n.

- $A_n \subset S_n$ par définition.
- $A_n \neq \varnothing$ car la permutation id est paire donc appartient à A_n.
- Soit $\sigma, \sigma' \in A_n$. Montrons que $\sigma(\sigma')^{-1} \in A_n$. En effet,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma(\sigma')^{-1}) &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon((\sigma')^{-1}) && \text{car } \varepsilon \text{ est un morphisme} \\ &= \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')^{-1} && \text{idem} \\ &= 1 \times 1^{-1} && \text{car } \sigma, \sigma' \text{ sont paires} \\ &= 1 \end{aligned}$$

  Donc $\sigma(\sigma')^{-1} \in A_n$.

Finalement, A_n est un sous-groupe de S_n.

3) Donner le cardinal de S_3, puis la liste des éléments de S_3.$|S_3| = 3! = \boxed{6}$ et les éléments de S_3 sont

$$\boxed{\mathrm{id}, \quad (1\ 2), \quad (1\ 3), \quad (2\ 3), \quad (1\ 2\ 3), \quad (1\ 3\ 2)}$$

4) Donner la liste des éléments de A_3. Quels sont les sous-groupes de A_3 ?Les éléments de A_3 sont les permutations paires de S_3. Par la question précédente et la question 1, les éléments de A_3 sont donc

$$\boxed{\mathrm{id}, \quad (1\ 2\ 3), \quad (1\ 3\ 2)}$$

Pour déterminer les sous-groupes de A_3, on raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse : soit H un sous-groupe de A_3. Alors $\mathrm{id} \in H$ et pour tous $\sigma, \sigma' \in H$ on a $\sigma(\sigma')^{-1} \in H$. On peut déjà considérer le cas $H = \{\mathrm{id}\}$, qui est le sous-groupe trivial de A_3.
  Considérons le cas $H \neq \{\mathrm{id}\}$. Si par exemple $(1\ 2\ 3) \in H$, on a

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3) = (1\ 3\ 2) \in H$$

  Ainsi, $H = \{\mathrm{id}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = A_3$. On montre de même que si $(1\ 3\ 2) \in H$ alors $H = A_3$. Finalement, les seuls cas possibles sont $H = \{\mathrm{id}\}$ et $H = A_3$.
- Synthèse : On a vu en analyse que $\{\mathrm{id}\}$ est le sous-groupe trivial de A_3. Par ailleurs, A_3 est un groupe inclus dans A_3 donc un sous-groupe de A_3.

Finalement, les seuls sous-groupes de A_3 sont

$$\boxed{\{\mathrm{id}\} \quad \text{et} \quad A_3}$$

5) Un résultat du cours affirme que toute permutation de S_n peut s'écrire comme un produit de transpositions. Le but de cette question est d'établir que A_n est engendré par les 3-cycles.

a) Montrer que le produit de deux transpositions (à supports disjoints ou non) de S_n peut s'écrire soit comme un 3-cycle, soit comme un produit de deux 3-cycles.Soit $(a\ b)$ et $(c\ d)$ deux transpositions de S_n (donc $a \neq b$ et $c \neq d$). On pose

$$\sigma = (a\ b)(c\ d)$$

- Si $(c\ d) = (a\ b)$, alors comme $n \geq 3$ on peut écrire

$$\sigma = \mathrm{id} = (1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)$$

- Si les supports de $(a\ b)$ et $(c\ d)$ ont un élément en commun, par exemple $c = a$, alors
$$\sigma = (a\ b)(a\ d) = (b\ a)(a\ d) = (b\ a\ d)$$
- Enfin, si les supports de $(a\ b)$ et $(c\ d)$ sont disjoints, on peut écrire
$$\begin{aligned}\sigma &= (a\ b)(c\ d)\\ &= (a\ b)(b\ c)(b\ c)(c\ d) \qquad \text{car } (b\ c)(b\ c) = \mathrm{id}\\ &= (a\ b\ c)(b\ c\ d)\end{aligned}$$

b) Conclure.Soit $\sigma \in A_n$, donc σ est une permutation paire. Alors σ peut s'écrire comme un produit de $2k$ transpositions. En effet, si ce nombre était impair, σ ne pourrait pas être paire. On peut donc écrire
$$\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_{2k-1}\tau_{2k}$$
avec $\tau_1, \cdots, \tau_{2k}$ des transpositions. Or, par la question précédente, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$ peut s'écrire comme un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles. On en déduit que σ peut s'écrire comme le produit d'un ou plusieurs 3-cycles.

3) Montrer que l'application $\varphi : \sigma \mapsto \sigma(1\ 2)$ est une bijection de A_n dans $S_n \setminus A_n$.Tout d'abord, justifions que $\varphi : A_n \to S_n \setminus A_n$ est bien définie. Soit $\sigma \in A_n$, justifions que $\varphi(\sigma) \notin A_n$. En effet,
$$\varepsilon(\varphi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon((1\ 2)) = 1 \times (-1) = -1$$
d'où $\varphi(\sigma)$ est impaire, donc appartient à $S_n \setminus A_n$. À présent, montrons que φ est une bijection. On pose
$$\begin{aligned}\psi : S_n \setminus A_n &\to A_n\\ \sigma &\mapsto \sigma(1\ 2)\end{aligned}$$
Alors on montre de même que ψ est bien définie et on remarque que pour tout $\sigma \in A_n$
$$(\psi \circ \varphi)(\sigma) = \sigma(1\ 2)(1\ 2) = \sigma$$
et on montre de même que $(\varphi \circ \psi)(\sigma) = \sigma$. Ainsi, ψ est l'application réciproque de φ, donc φ est bijective.

4) En déduire le cardinal de A_n.Comme φ est une bijection et que A_n et $S_n \setminus A_n$ sont finis, on a
$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A_n) &= \mathrm{card}(S_n \setminus A_n)\\ &= \mathrm{card}(S_n) - \mathrm{card}(A_n)\end{aligned}$$
D'où, $2\mathrm{card}(A_n) = n!$, ce qui entraine
$$\boxed{\mathrm{card}(A_n) = \frac{n!}{2}}$$

On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *distingué* si : $\forall h \in H \quad \forall x \in G \quad xhx^{-1} \in H$.

5) Montrer que A_n est un sous-groupe distingué de S_n.Soit $h \in A_n$ et $x \in S_n$. Montrons que $xhx^{-1} \in A_n$:
$$\begin{aligned}\varepsilon(xhx^{-1}) &= \varepsilon(x)\varepsilon(h)\varepsilon(x^{-1})\\ &= \varepsilon(x)\varepsilon(x^{-1})\varepsilon(h)\\ &= \varepsilon(xx^{-1})\varepsilon(h)\\ &= \varepsilon(\mathrm{id})\varepsilon(h)\\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$
Ainsi, xhx^{-1} est paire donc $xhx^{-1} \in A_n$. Finalement, A_n est un sous-groupe distingué de S_n.

Exercice 3 : Déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

On considère dans cet exercice l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On admettra que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau. Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on définit son déterminant de la même manière que la matrice A vue comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1) Rappeler la définition du déterminant de A, en fonction des coefficients a_{ij}.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$$

2) En déduire que $\det A \in \mathbb{Z}$.

Comme les coefficients de A sont dans $\mathbb{Z}$, pour tout $\sigma \in S_n$ on a $\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \in \mathbb{Z}$ (car $\varepsilon(\sigma) \in \{-1,1\}$). Ainsi, par somme, $\det A \in \mathbb{Z}$.

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pour lesquelles il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AB = I_n$ (on admettra que cela équivaut à $BA = I_n$). On dira alors que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et on notera $B := A'$.

3) Justifier que si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que dans ce cas $A^{-1} = A'$.

On suppose A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donc il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AA' = A'A = I_n$. Cela entraine que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A^{-1} = A'$.

4) Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}. La matrice A est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$?

On passe par la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(et après calculs on trouve)} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Supposons par l'absurde que A soit inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Alors par la question précédente, on aurait $A' = A^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Or, comme $\left[A^{-1}\right]_{11} = \frac{1}{2}$, il est clair que $A^{-1} \notin \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Contradiction. Finalement, A n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

5) On suppose maintenant A inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $\det A \in \{-1,1\}$.

Supposons $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors

$$(\det A)(\det A') = \det(AA') = \det I_n = 1$$

Or, comme $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, par la question **2)**, on en déduit que $\det A$ et $\det A'$ sont des entiers, dont le produit vaut 1. Ainsi, $\det A$ est inversible dans $\mathbb{Z}$. Comme le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}$ est $\{-1,1\}$, on en déduit que $\det A \in \{-1,1\}$.

6) Réciproquement, on suppose que $\det A \in \{-1,1\}$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$.
Indication : on pourra utiliser la comatrice de A.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $\det A \in \{-1,1\}$. On sait alors que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\mathrm{Com} A)^\top$$

Montrons que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Tout d'abord, $\frac{1}{\det A} = \det A \in \{-1,1\}$. Ensuite, si on note Δ_{ij} le mineur d'indice (i,j) de A, on a

$$[\mathrm{Com} A]_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Or, Δ_{ij} est un déterminant constitué de coefficients de A, donc le déterminant d'une matrice dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$, en supposant ici $n \geq 2$, le cas $n = 1$ étant trivial. Par la question **2)**, on en déduit que $\Delta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathrm{Com} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Enfin, on peut alors facilement vérifier que $(\mathrm{Com} A)^\top \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Donc, $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Finalement, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ avec $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On en déduit que A est inversible dans $\mathbb{Z}$, donc $A \in GL_n(\mathbb{Z})$.

7) Application : dans cette question on suppose que $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2 & -1 \\ 3 & \alpha & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.Le calcul donne $\det A = \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1$. Ainsi,

$$A \in GL_3(\mathbb{Z}) \iff \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 \in \{-1,1\}$$

On traite chaque cas séparément.

- $$\begin{aligned} \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 1 &\iff \alpha(\alpha^2 - \alpha - 2) = 0 \\ &\iff \alpha(\alpha+1)(\alpha-2) = 0 \\ &\iff \alpha \in \{0,-1,2\} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 = -1 &\iff \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0 \\ &\iff (\alpha-1)(\alpha^2-2) = 0 \\ &\iff \alpha \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\} \\ &\iff \alpha = 1 \qquad \text{car } \alpha \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Finalement, $\det A \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\alpha \in \{-1,0,1,2\}$.