DEVOIR MAISON N°3

UN PARADOXE... (DM OPTIONNEL)

Exercice 1 (Le paradoxe des chapeaux)**.** On suppose qu'on place une infinité d'élèves en file indienne. Chaque élève est repéré par un unique entier $n \in \mathbb{N}$. L'élève n peut voir les élèves $n+1$, $n+2$, etc. jusqu'à l'infini. Mais il ne peut pas voir les élèves 0 à $n-1$.
Une fois les élèves placés, les élèves ne peuvent plus communiquer entre eux. On coiffe chaque élève d'un chapeau de couleur blanche ou noire (une chance sur deux pour chacune). L'élève n ne peut pas voir la couleur de son propre chapeau mais peut voir la couleur des chapeaux des élèves $n+1$, $n+2$, etc. jusqu'à l'infini.
Une fois les chapeaux placés, au même moment, tous les élèves doivent annoncer « blanc » ou « noir » pour deviner la couleur de leur propre chapeau. Leur objectif est qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'erreurs ! Cela semble impossible. Et pourtant...

Quelques détails importants :

- Chaque élève, une fois placé, connait son numéro n dans la file indienne. Avec les couleurs des chapeaux $n+1$, $n+2$, ... il s'agit des seules informations que l'élève n connait.
- Avant d'être placés en file indienne, les élèves peuvent communiquer et ont tout le temps de se concerter pour mettre au point une stratégie.

On se donne une suite $c : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ définie par

$$c(n) = \begin{cases} 0 & \text{si le chapeau de l'élève } n \text{ est blanc} \\ 1 & \text{si le chapeau de l'élève } n \text{ est noir} \end{cases}$$

On se donne également une suite $a : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ où $a(n)$ est la couleur annoncée par l'élève n. L'objectif est donc que l'ensemble S ci-dessous soit fini :

$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid a(n) \neq c(n)\}$$

On notera $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, càd l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$. On a ainsi $a, c \in E$.

1) Pour $u, v \in E$, on définit la relation

$$u\mathcal{R}v \iff (\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u(n) = v(n))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

2) Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E ?

Pour $u \in E$, on note $[u]$ la classe d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$.

3) Montrer que si $a \in [c]$, alors S est fini.

On note $(\mathscr{C}_i)_{i \in I}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$ (I est un ensemble, infini dans notre cas, qui permet d'indexer ces classes, on peut toujours en trouver un). Les élèves mettent au point la stratégie suivante : pour chaque classe $\mathscr{C}_i$, ils se fixent un représentant $w_i \in \mathscr{C}_i$ de la classe. Ils ont donc en tête, pour chaque $i \in I$, une suite $w_i : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ telle que $w_i \in \mathscr{C}_i$ (leur mémoire est infinie !).

4) Justifier qu'il existe un unique $i_0 \in I$ tel que $c \in \mathscr{C}_{i_0}$.

Dans la suite, on fixe $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que l'élève numéro k connait son numéro (càd k) ainsi que la suite $c(k+1), c(k+2), \ldots$ Il peut donc construire la suite $q_k \in E$ définie par

$$\begin{aligned} q_k : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ c(n) & \text{si } n \geq k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

5) Vérifier que $q_k \in [c]$. En déduire que $q_k \in \mathscr{C}_{i_0}$.

Ainsi, chaque élève k arrive à déduire la classe $\mathscr{C}_{i_0}$ qui contient c. Tous les élèves, grâce à leur stratégie, peuvent donc déduire le même représentant w_{i_0} de $\mathscr{C}_{i_0}$. L'élève k (qui sait qu'il est le k-ième dans la file) annoncera alors

$$a(k) := w_{i_0}(k)$$

Ainsi, les élèves annoncent la suite $a := w_{i_0}$.

6) Justifier que $a \in [c]$. Conclure.

Un paradoxe ?

Dans le problème ci-dessus, il n'y a que deux « couleurs » : 0 et 1. On peut refaire le même raisonnement en remplaçant $\{0,1\}$ par n'importe quel ensemble : $[\![0,10]\!]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$... donc on pourrait avoir une infinité de « couleurs » ! On pourrait par exemple noter sur chaque chapeau un réel à deviner, et à nouveau les élèves réussissent à n'avoir qu'un nombre fini d'erreurs...
De plus, les « couleurs » des chapeaux peuvent être décidées de manière totalement arbitraire (plutôt que « au hasard »). On pourrait même faire en sorte que tous les chapeaux aient des « couleurs » différentes ! Dans tous les cas, les élèves ne feront qu'un nombre fini d'erreurs.

Mais c'est *impossible*... Est-ce qu'il y aurait une entourloupe dans notre raisonnement ?