## Devoir Maison n°3

# Un paradoxe... (Correction)

1) Pour $u, v \in E$, on définit la relation

$$u \mathcal{R} v \iff (\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u(n) = v(n))$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$.

Soit $u, v, w \in E$.

- Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive. On pose $N = 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a évidemment $u(n) = u(n)$, donc $u\mathcal{R}u$.
- Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique. Si $u\mathcal{R}v$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u(n) = v(n)$. En particulier, on a aussi $v(n) = u(n)$, donc $v\mathcal{R}u$.
- Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Si $u\mathcal{R}v$ et $v\mathcal{R}w$, alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N_1 \quad u(n) = v(n) \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq N_2 \quad v(n) = w(n)$$

  Alors, si on pose $N := \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, on a $u(n) = v(n) = w(n)$, si bien que $u\mathcal{R}w$.

2) Est-ce que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E$ ?

Non, car $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique : par exemple si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(n) = 0 \qquad v(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

alors on montre facilement que $u\mathcal{R}v$, donc $v\mathcal{R}u$ par symétrie, cependant $u \neq v$.

3) Montrer que si $a \in [c]$, alors $S$ est fini.

Comme $a \in [c]$, on a $a\mathcal{R}c$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $a(n) = c(n)$. Ainsi, par définition de $S$,

$$S \subset [\![0, N-1]\!]$$

(avec la convention $[\![0, -1]\!] = \varnothing$). En particulier, $S$ possède au plus $N$ éléments, donc est fini.

4) Justifier qu'il existe un unique $i_0 \in I$ tel que $c \in \mathscr{C}_{i_0}$.

Comme $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$, les classes d'équivalences forment une partition de $E$. Ainsi, comme $c \in E = \cup_{i \in I} \mathscr{C}_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $c \in \mathscr{C}_{i_0}$. De plus, les classes étant disjointes, l'indice $i_0$ est unique.

5) Vérifier que $q_k \in [c]$. En déduire que $q_k \in \mathscr{C}_{i_0}$.

$k$ étant fixé, on pose $N = k + 1 \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \geq N$, on a par construction $q_k(n) = c(n)$. Donc $q_k \mathcal{R} c$, et en particulier $q_k \in [c] = \mathscr{C}_{i_0}$.

6) Justifier que $a \in [c]$. Conclure.

$a = w_{i_0} \in \mathscr{C}_{i_0} = [c]$, donc par la question 1, l'ensemble $S$ est fini. Ainsi, les élèves ne font qu'un nombre fini d'erreurs.

**Un paradoxe ?**

Dans le problème ci-dessus, il n'y a que deux « couleurs » : 0 et 1. On peut refaire le même raisonnement en remplaçant $\{0,1\}$ par n'importe quel ensemble : $[\![0,10]\!]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$… donc on pourrait avoir une infinité de « couleurs » ! On pourrait par exemple noter sur chaque chapeau un réel à deviner, et à nouveau les élèves réussissent à n'avoir qu'un nombre fini d'erreurs…
De plus, les « couleurs » des chapeaux peuvent être décidées de manière totalement arbitraire (plutôt que « au hasard »). On pourrait même faire en sorte que tous les chapeaux aient des « couleurs » différentes ! Dans tous les cas, les élèves ne feront qu'un nombre fini d'erreurs.

Mais c'est *impossible*… Est-ce qu'il y aurait une entourloupe dans notre raisonnement ?

**L'axiome du choix (Hors-Programme, c'est de la « culture mathématique »)**

Le raisonnement de l'exercice est correct, à une étape près : le fait que dans chaque classe $\mathscr{C}_i$, on puisse choisir un représentant $w_i \in \mathscr{C}_i$. Dit autrement, on admet que dans chaque ensemble $\mathscr{C}_i$ (pour tous les $i \in I$) on puisse « choisir » un élément. C'est ce qu'on appelle **l'axiome du choix**. Cela semble tellement naturel qu'on ne remet pas en question que cela soit possible. Cela ne pose pas de problèmes quand $I$ est fini, mais cela peut conduire à des résultats « contradictoires » si, comme ici, $I$ est infini.

Si on admet l'axiome du choix comme vrai, alors le raisonnement de ce DM est correct et on obtient un paradoxe qui défie l'intuition. Et ça ne s'arrête pas là : avec l'axiome du choix, on peut aussi montrer qu'on peut couper une boule en morceaux, pour reconstruire avec ces morceaux deux boules identiques de même taille que l'originale. C'est le paradoxe de Banach-Tarski.

Malgré ces contradictions, l'axiome du choix permet de généraliser de nombreuses théories mathématiques et la majorité des mathématiciens acceptent cet axiome et l'utilisent dans leurs démonstrations. Ce sera aussi notre cas cette année (notamment pour montrer que tout espace vectoriel admet des bases).