DEVOIR MAISON N°2

APPLICATIONS, RELATIONS, FONCTIONS

Exercice 1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax+b \end{aligned}$$

Si $a=0$, alors $f(x)=b$. f n'est pas injective car $f(0)=b=f(1)$ et $0\neq 1$. De plus en posant $y=b-1$, on voit que l'équation $f(x)=y$ n'a pas de solution. Donc f n'est pas surjective.
Si $a\neq 0$, alors pour tout $y\in\mathbb{R}$, on résout l'équation $f(x)=y$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\iff ax+b=y \\ &\iff x=\frac{y-b}{a} \end{aligned}$$

il y a donc existence et unicité d'une solution. Ainsi, f est bijective, donc injective et surjective.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

On a $g(0)=0=g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ donc g n'est pas injective. Soit $y\in\mathbb{N}$. Alors en posant $x=y\in\mathbb{R}_+$, on a $g(x)=y$, donc g est surjective.

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln|x| \end{aligned}$$

On a $h(1)=0=h(-1)$ donc h n'est pas injective. Soit $y\in\mathbb{R}$. Alors en posant $x=e^y\in\mathbb{R}^*$, on a $h(x)=y$, donc h est surjective.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ (r,\theta) &\mapsto re^{i\theta} \end{aligned}$$

On a $u(1,0)=1e^0=1e^{i2\pi}=u(1,2\pi)$, donc u n'est pas injective. On affirme que l'équation $u(r,\theta)=0$ d'inconnue $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ n'a pas de solution. En effet, supposons par l'absurde qu'un couple (r,θ) soit solution. Alors :

$$\begin{aligned} u(r,\theta)=0 &\implies re^{i\theta}=0 \\ &\implies e^{i\theta}=0 \qquad \text{car } r>0 \\ &\implies |e^{i\theta}|=|0| \\ &\implies 1=0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Donc u n'est pas surjective.

On pourrait accepter une rédaction disant que le complexe $z=0$ n'admet pas de forme trigonométrique, donc n'a pas d'antécédent par u.

Exercice 2

1) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si f injective.

Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition de $f(A)$, on a $f(x) \in f(A)$. Or, cela implique que $x \in f^{-1}(f(A))$, à nouveau par définition [1]. D'où le résultat par arbitraire sur x.

Supposons maintenant que f est injective. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Montrons que $x \in A$. Tout d'abord, $f(x) \in f(A)$. Donc par définiton, il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$. Or, f est injective, donc $x = y$. Comme $y \in A$, on a également $x \in A$. D'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$ par arbitraire sur x.

2) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Montrer que l'inclusion réciproque est vraie si f surjective.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Montrons que $y \in B$. Tout d'abord, par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$. Ainsi, $y \in B$. D'où le résultat.

Supposons maintenant que f est surjective. Soit $y \in B$. Montrons que $y \in f(f^{-1}(B))$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. D'où le résultat par arbitraire sur y.

Exercice 3

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$.

- On a $f(x) = f(x)$, donc $x\mathcal{R}x$. Ainsi $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Si $x\mathcal{R}y$, alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$ et on a $y\mathcal{R}x$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique.
- Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$. Donc $f(x) = f(z)$ et on a $x\mathcal{R}z$. Ainsi, $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Si $f(x) = x^2$, déterminer tous les éléments de la classe d'équivalence de x.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff y\mathcal{R}x \\ &\iff y^2 = x^2 \\ &\iff y = x \text{ ou } y = -x \end{aligned}$$

Ainsi, $[x] = \{-x, x\}$.

3) Si $f(x) = \cos x$, déterminer tous les éléments de la classe d'équivalence de x.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff y\mathcal{R}x \\ &\iff \cos(y) = \cos(x) \\ &\iff y \equiv x\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv -x\,[2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[x] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \equiv x\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv -x\,[2\pi]\}$$

1. On a $f(x) \in B$ avec $B = f(A)$, donc $x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$

Exercice 4

1) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre, et que l'ordre est total.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^*$.

- On a $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$, donc $x \preceq x$. Ainsi, $\preceq$ est réflexive.
- Si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ et $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, si bien que $x = y$. Ainsi $\preceq$ est antisymétrique.
- Si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ et $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$. Donc $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{z}$ et on a $x \preceq z$. Ainsi, $\preceq$ est transitive.

Finalement, $\preceq$ est une relation d'ordre.

Montrons enfin que l'ordre est total. Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$. Alors comme $\leq$ définit un ordre total, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. En passant à l'inverse, on en déduit que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ ou $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$, donc $y \preceq x$ ou $x \preceq y$. Ainsi, $\preceq$ définit un ordre total.

2) Donner un majorant et un minorant de l'ensemble $\{-2, -1, 1, 2\}$ pour $\preceq$.

On pose $A = \{-2, -1, 1, 2\}$. Soit $M \in \mathbb{R}^*$. M est un majorant de A pour $\preceq$ si

$$\forall x \in A \quad x \preceq M$$

ou encore

$$\forall x \in A \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{M}$$

Il faut donc choisir M tel que

$$\frac{1}{M} \geq \max\left(\frac{1}{-2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right) = 1$$

On peut donc prendre $M = \frac{1}{2}$ (ou même $M = 1$).

De même, m est un minorant de A pour $\preceq$ si

$$\frac{1}{m} \leq \min\left(\frac{1}{-2}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right) = -1$$

On peut donc prendre $m = -\frac{1}{2}$ (ou même $m = -1$).

3) Montrer que $[1, 2]$ admet un plus petit et un plus grand élément pour $\preceq$ et les déterminer.

Montrons que $M = 1$ est le plus grand élément de $[1, 2]$ pour $\preceq$. Soit $x \in [1, 2]$. On a $M = 1 \leq x$ donc

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{M}$$

ce qui entraine $x \preceq M$. Par arbitraire sur x, on en déduit que $M = 1$ est un majorant de $[1, 2]$. Or, $M \in [1, 2]$, donc M est bien le maximum de $[1, 2]$ pour $\preceq$. De même, on montre que $m = 2$ est un minorant de $[1, 2]$ pour $\preceq$.

Exercice 5

$$f_0 : x \mapsto \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) \qquad f_1 : x \mapsto x^{2x} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{\arctan x} \qquad f_3 : x \mapsto (x\ln x)^{-3/2} \qquad f_4 : x \mapsto xe^x \ln x$$

$$\begin{gathered}
f_0'(x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x \qquad (\neq 1 \text{ a priori !!}) \\
f_1(x) = e^{2x\ln x} \implies f_1'(x) = 2(\ln x + 1)\, e^{2x\ln x} \\
f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} \times \frac{1}{1+x^2} \\
f_3'(x) = -\frac{3}{2}(x\ln x)^{-\frac{5}{2}} \times (\ln x + 1)
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
f_4'(x) &= 1 \cdot e^x \ln x + xe^x \ln x + xe^x \cdot \frac{1}{x} \\
&= e^x (x\ln x + \ln x + 1)
\end{aligned}$$

Exercice 6

$$F : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $D_F = \mathbb{R}_+^*$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Alors

$$\begin{aligned}
F'(x) > 0 &\iff \frac{1-\ln x}{x^2} > 0 \\
&\iff 1 - \ln x > 0 \\
&\iff \ln x < 1 \\
&\iff 0 < x < e \qquad \text{par stricte croissance de } \exp \text{ et de } \ln
\end{aligned}$$

Ainsi,

x	0		e		$+\infty$
$F'(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Justifions les limites. Par croissances comparées :

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Comme $\ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$, on obtient par produit

$$F(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$$

$$G : x \mapsto \sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}$$

$G(x)$ a un sens si et seulement si $\dfrac{x-5}{2x+3} \geq 0$. Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-5}{2x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$D_G = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup [5, +\infty[$$

Ensuite, G est dérivable en tout point x tel que $\dfrac{x-5}{2x+3} \neq 0$, donc l'ensemble de dérivabilité de G est

$$D := \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup]5, +\infty[$$

Soit $x \in D$. Alors

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-5}{2x+3}}} \times \frac{(2x+3) - 2(x-5)}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+3}{x-5}} \times \frac{13}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

On constate que $G'(x) > 0$ car $x \neq -\dfrac{3}{2}$. Ainsi,

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$G'(x)$		$+$	$\|\|$	//////	$\|\|$	$+$	
$G(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|$	//////	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Justifions les limites :

$$\sqrt{\frac{x-5}{2x+3}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Idem pour la limite en $-\infty$. Enfin,

$$x - 5 \xrightarrow[x\to-\frac{3}{2}]{} -\frac{13}{2}$$

$$\frac{1}{2x+3} \xrightarrow[x\to-\frac{3}{2},\quad x<-\frac{3}{2}]{} -\infty$$

Ainsi, la limite du produit est $+\infty$, et cela ne change pas quand on compose par une racine carrée.

$$H : x \mapsto (2x)^{-x}$$

$H(x) = e^{-x\ln(2x)}$ a un sens si et seulement si $2x > 0$, donc $D_H = \mathbb{R}_+^*$.
H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$H'(x) = \left(-\ln(2x) - x\frac{2}{2x}\right)e^{-x\ln(2x)} = -\left(\ln(2x)+1\right)e^{-x\ln(2x)}$$

$$\begin{aligned}
H'(x) > 0 &\iff -\left(\ln(2x)+1\right)e^{-x\ln(2x)} > 0 \\
&\iff \ln(2x)+1 < 0 && \text{car } -e^{-x\ln(2x)} < 0 \\
&\iff \ln(2x) < -1 \\
&\iff 0 < 2x < e^{-1} && \text{car exp et ln sont strictement croissantes} \\
&\iff x < \frac{e^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{2}e^{-1}$		$+\infty$
$H'(x)$		$+$	0	$-$	
$H(x)$	1	$\nearrow$	$\exp\left(\frac{1}{2}e^{-1}\right)$	$\searrow$	0

Justifions les limites. Comme

$$-x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

$$\ln(2x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

on a par produit

$$-x\ln(2x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

et donc

$$e^{-x\ln(2x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

De plus, par croissances comparées

$$x\ln(2x) = x\ln 2 + x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0+0=0$$

Ainsi,

$$e^{-x\ln(2x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} e^{-0} = 1$$