DEVOIR MAISON N°1

LOGIQUE ET RAISONNEMENT – CORRIGÉ

Exercice 1. On fait une table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$	non$P$	non$P$ ou Q
F	F	**V**	V	**V**
F	V	**V**	V	**V**
V	F	**F**	F	**F**
V	V	**V**	F	**V**

Les colonnes correspondantes étant identiques, on en déduit que $\boxed{(P \implies Q) \iff (\text{non}P \text{ ou } Q)}$.

Exercice 2. On peut le démontrer par une table de vérité : on prendra garde au fait que, comme il y a trois propositions, il faut 8 lignes pour énumérer tous les cas possibles du triplet (P,Q,R).

P	Q	R	P ou Q	$(P$ ou $Q)$ ou R	Q ou R	P ou $(Q$ ou $R)$
F	F	F	F	**F**	F	**F**
F	F	V	F	**V**	V	**V**
F	V	F	V	**V**	V	**V**
F	V	V	V	**V**	V	**V**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
V	F	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	V	**V**	V	**V**
V	V	V	V	**V**	V	**V**

Les colonnes correspondantes étant identiques, on en déduit que $\boxed{\text{les deux propositions sont équivalentes}}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons la contraposée, c'est-à-dire si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8. Comme n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Ainsi

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k+1) \end{aligned}$$

Or, pour tout entier k, il y a toujours un nombre pair parmi k et $k+1$. Ainsi 2 divise $k(k+1)$, si bien qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2k'$. Ainsi $n^2 - 1 = 8k'$. Donc n^2-1 est divisible par 8 et par contraposée on a le résultat voulu.

Exercice 4. *On a très envie de faire par analyse synthèse. Sauf que dans le cas présent, la partie analyse donne tellement de solutions (une infinité) qu'on ne peut pas faire la partie synthèse : il y a trop de cas à traiter. Il faut donc regarder une autre méthode : par équivalences !*

Soit $x > \dfrac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2x-1} && \text{et ces deux nombres sont dans } \mathbb{R}_+^* \text{ car } x > \frac{1}{2} \\ \iff & x^2 \geq 2x - 1 && \text{par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ \iff & (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Or cette dernière proposition est toujours vraie. On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[}$.

Exercice 5.

1) Les équivalences recherchées sont :
$$\text{a} \iff \text{ii} \qquad \text{b} \iff \text{iv} \qquad \text{d} \iff \text{i}$$
Les propositions $\boxed{\text{c. et iii. sont les intruses}}$.

2) On donne un contre-exemple : soit $E = \{0\}$ et $P(x) : x > 0$. La proposition c. est fausse car il n'existe pas d'élément de E qui vérifie $P(x)$. En revanche on affirme que iii. est vraie. En effet, c'est une implication sous la forme $A \implies B$ avec A fausse (car à nouveau aucun élément de E ne vérifie $P(x)$). Ainsi, c. et iii. ne sauraient être équivalentes puisque dans ce cas précis elles n'ont pas la même valeur de vérité.

3) On pose
e. S'il existe un élément de E vérifiant P,alors il existe un élément de E qui ne vérifie pas P
$$\text{v. } \exists x, y \in E \qquad P(x) \text{ et non} P(y)$$
et dans ce cas,
$$\text{c} \iff \text{v} \qquad \text{e} \iff \text{iii}$$