

Programme de colles n°30

semaine du 12 au 16 juin

Ce n'est pas le début de la fin, ce n'est que la fin du début.

Notions vues en cours

Chapitre 24 : Espérance, variance

- Espérance : définition (pour une v.a. réelle ou complexe), notation $\mathbb{E}(X)$, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, calcul pour les lois usuelles, espérance d'une v.a. constante
- Formule de transfert, espérance d'un produit de v.a. indépendantes, v.a. centrée
- Variance : définition (pour une v.a.r.), notation $\mathbb{V}(X)$, réécriture avec $\mathbb{E}(X^2)$, variance de $aX + b$, calcul pour les lois usuelles
- Écart-type, notation $\sigma(X)$, v.a.r. centrée réduite, si $\sigma(X) > 0$, alors on peut construire une v.a.r. centrée réduite à partir de X
- Covariance : définition, notation $\text{Cov}(X, Y)$, interprétation, v.a. positivement / négativement corrélées, réécriture avec $\mathbb{E}(XY)$
- Propriétés de la covariance : bilinéarité, symétrie, $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$; identité remarquable pour le calcul de $\mathbb{V}(X + Y)$
- V.a. décorréelées, deux v.a. indépendantes sont décorréelées mais la réciproque est fautive
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev et application à un cas classique

Chapitre 25 : espaces préhilbertiens réels (*numéroté 28, issu d'un document prêté par le Lycée Marceau*)

- Produit scalaire : c'est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive ; notations diverses (dont aucune n'est "signifiante")
- Exemples de produits scalaires canoniques : \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n , $C^0([a, b], \mathbb{R})$
- Espace préhilbertien réel, espace euclidien, norme euclidienne associée
- Propriétés d'une norme (euclidienne ou non) : séparation, homogénéité, inégalité triangulaire
- Formules de polarisations, identité du parallélogramme, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité
- Distance euclidienne : définitions, propriétés classiques

Le cours du chapitre 25 (numéroté 28) s'arrête juste avant la partie II page 6.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.

- **Sans démonstration** : définition de l'espérance, énoncé de ses propriétés, et espérance des lois usuelles Chapitre 24, Définition 24.1, Propositions 24.5, et partie 1.2
- **Sans démonstration** : définition de la variance, réécriture, variance des lois de Bernoulli et binomiales, définition de la covariance et réécriture Chapitre 24, Définitions 24.9 et 24.17, Propositions 24.10, 24.11, 24.12, et 24.18
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : on ne démontrera pas le cas d'égalité Chapitre 25, Théorème 28.11