Programme de colles n°26

semaine du 8 au 12 mai

Changement de planning pour la publication des programmes de colles : compte tenu des jours fériés et du concours blanc, afin de lisser le nombre de notions au programme de chaque colle, certains programmes seront publiés un à deux jours plus tard, plus précisément les 4, 12, 25 mai et 1er juin.

Notions vues en cours

Chapitre 18 : Groupe symétrique

- Permutation d'un ensemble E, ensemble $S(E)$, c'est un groupe pour la loi $\circ$
- Groupe symétrique $S_n = S\left(\llbracket 1, n \rrbracket\right)$, non abélien si $n \geq 3$, S_n possède $n!$ éléments
- Notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, notation multiplicative $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$, σ^{-1} est l'inverse de σ
- p-cycle, notation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, support d'un cycle, deux cycles à supports disjoints commutent, transposition, point fixe
- Toute permutation différente de id peut se décomposer en un produit de cycles à supports disjoints, de manière unique à l'ordre près, orbite d'une permutation, méthode pratique de la décomposition
- Décomposition d'un cycle (et par suite d'une permutation) en produit de transpositions, cette écriture n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions est unique, permutation paire / impaire
- Signature d'une permutation, notation $\varepsilon(\sigma)$, c'est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$, lien avec la parité d'une permutation, la signature d'une transposition vaut -1, celle d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$

Chapitre 19 : Déterminants

- Application / forme bilinéaire, application / forme p-linéaire : définition, exemples
- Forme n-linéaire alternée (sur un e.v. de dimension n) : définition, s'annule en les familles liées
- Forme n-linéaire antisymétrique : définition, $f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$, toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique (c'est même une équivalence)
- Expression d'une forme n-linéaire alternée selon une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de l'espace de départ, f est entièrement déterminée par $f(e_1, \cdots, e_n)$
- Déterminant d'une famille de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, notation $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$
- Déterminant de taille 1, 2, 3 (règle de Sarrus), déterminant d'une matrice carrée, $\det A^\top = \det A$, le déterminant est une forme n-linéaire alternée en les colonnes / les lignes de la matrice (donc si elles forment une famille liée, le déterminant est nul, etc.)
- Opérations élémentaires sur le déterminant

Le développement selon une ligne ou colonne n'est pas au programme de cette semaine.

Questions de cours

- Décomposer une permutation donnée en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. Enfin, donner sa signature Chapitre 18, page 6 et suivantes
- Définitions d'une application bilinéaire, d'une forme bilinéaire et expression d'une application bilinéaire selon une base de l'espace de départ (de dimension finie) Chapitre 19, Définition 19.1 et Proposition 19.2
- Toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique Chapitre 19, Proposition 19.8