Programme de colles n°25

semaine du 1 au 5 mai

Notions vues en cours

Chapitre 17 : Matrices et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs selon une base, notations $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \dots, c_m)$
- Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ selon des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$; cas particulier d'un endomorphisme, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est un isomorphisme d'e.v. Expressions des matrices de $u(x)$, de $\alpha u + \beta v$, de $v \circ u$, de u^{-1}
- Morphisme canoniquement associé à une matrice, noyau / image / rang d'une matrice, notations $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{rg}\, A$
- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi son noyau vaut $\{0\}$ ssi son image est $\mathbb{K}^n$ ssi son rang est n
- Pour un système linéaire $(\mathcal{S}) : AX = B$ avec comme système homogène $(\mathcal{S}_0) : AX = 0$:
  - Les solutions de $(\mathcal{S}_0)$ est l'ensemble $\mathrm{Ker}\, A$ (lien avec l'unicité d'une solution de $(\mathcal{S})$)
  - Le système $(\mathcal{S})$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Im}\, A$
  - Si X_{part} est une solution de $(\mathcal{S})$, l'ensemble des solutions est $X_{part} + \mathrm{Ker}\, A$
  - Système de Cramer : existence et unicité d'une solution
- Détermination du noyau et de l'image d'un morphisme par la résolution de systèmes matriciels
- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, notation $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$, le coefficient d'indice (i, j) de $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est la i-ième coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$
- $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$, formules de changement de base pour un vecteur, pour un morphisme ; cas particulier d'un endomorphisme
- Matrices équivalentes : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
- Matrices de dilation / permutation / transvection, notations $D_i(\mu)$ / $P_{i,j}$ / $T_{i,j}(\lambda)$, inverses de ces matrices
- Lien entre les matrices précédentes et les opérations élémentaires sur les lignes / les colonnes, les opérations élémentaires préservent le rang
- Matrice J_r : définition, son rang est r ; Toute matrice A est équivalente à une (et une seule) matrice J_r avec $r = \mathrm{rg} A$, tout morphisme admet une matrice de la forme J_r pour matrice dans des bases bien choisies
- Deux matrices (de même taille) sont équivalentes ssi elles ont le même rang
- Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots sous forme échelonnée, ou encore à la dimension du s.e.v. engendré par ses colonnes (ou encore par ses lignes), $\mathrm{rg}\, A^\top = \mathrm{rg}\, A$

Questions de cours

Pas de question de cours cette semaine, la notation se fera uniquement sur les exercices. Il est recommandé de bien travailler les méthodes vues en TD.

Plus généralement il faut bien avoir en tête les principaux résultats d'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, premier chapitre sur les matrices, etc.)