Programme de colles n°24

semaine du 10 au 14 avril

Notions vues en cours

Chapitre 16 : Applications linéaires

- Application linéaire (ou morphisme d'e.v.) : définition, ensemble $\mathcal{L}(E,F)$, propriétés simples ($f(0_E) = 0_F$, etc.), endo- / iso- / automorphisme
- Exemples classiques d'applications / d'opérations linéaires : dérivation, intégrale, transposée, limite
- Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire ($\mathcal{L}(E,F)$ est un e.v.), composition (qui est de plus bilinéaire), passage à l'inverse
- Image directe et réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire est un s.e.v.
- Noyau et image d'un morphisme, notations $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$, caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, notation multiplicative u^n, groupe linéaire $GL(E)$
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des éléments d'une base, par ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires
- Caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité, selon le caractère libre ou générateur de l'image d'une base
- Ensembles isomorphes : définition, si et seulement si les dimensions sont égales, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$
- Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie) : équivalence entre injectivité / surjectivité / bijectivité / inversibilité à droite / inversibilité à gauche
- Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire, $\operatorname{Im} u$ est l'espace engendré par l'image d'une base
- Rang de $v \circ u$: lorsqu'un des morphismes est de rang fini et l'autre est bijectif, lorsque les deux sont de rang fini
- La restriction de u à un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ et sa corestriction à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme, théorème du rang
- Homothétie, projecteur (sur F parallèlement à G) : définition, interprétation géométrique, linéarité, $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, $G = \operatorname{Ker} p$, caractérisation ($p \circ p = p$)
- Symétrie (par rapport à F parallèlement à G) : définition, interprétation géométrique, linéarité, $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, caractérisation ($s \circ s = \mathrm{id}_E$)
- Forme linéaire, espace dual, notation E^*, $\dim E^* = \dim E$, base duale
- Hyperplan (vectoriel) H de E : définition, caractérisation (codimension un, ou encore $\dim H = \dim E - 1$), équation, l'intersection de m hyperplans est de dimension $\geq \dim E - m$

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- L'image directe et l'image réciproque d'un s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 16, Proposition 16.8
- Définition du rang d'une application linéaire et théorème du rang Chapitre 16, Théorème 16.32 (dans la preuve, on pourra utiliser le Lemme 16.31 sans l'écrire ni le redémontrer)
- Caractérisation d'un projecteur ($p \circ p = p$) : pour le sens réciproque, on montrera seulement que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$ Chapitre 16, Proposition 16.37