Programme de colles n°23

semaine du 3 au 7 avril

Notions vues en cours

Chapitre 14 : Espaces vectoriels (en plus de la semaine précédente)

- Somme de deux s.e.v. : définition, c'est un s.e.v., $F+G = \text{Vect}(F \cup G)$, quelques propriétés simples ($F+F = F$, etc.)
- Somme directe de deux s.e.v. : définition, notation $F \oplus G$, caractérisation
- S.e.v. supplémentaires dans un e.v. : définition, caractérisations
- Famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, notation $\mathbb{K}^{(I)}$, support
- Extension des notions vues pour des familles finies à des familles pouvant être infinies :
  - Combinaisons linéaires, s.e.v. engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice, famille libre, base

Chapitre 15 : Dimension d'un espace vectoriel

- Cardinal d'une famille, e.v. de dimension finie, e.v. de dimension infinie
- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite, tout e.v. admet des bases
- Le cardinal d'une famille libre est inférieur à celui d'une famille génératrice
- Définition de la dimension d'un e.v. (de dimension finie) comme cardinal d'une base, notation $\dim E$
- Bases et dimensions d'e.v. classiques : $\{0_E\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, formule de $\dim(E \times F)$
- Si $\dim E = n$, une famille libre / génératrice de E admet au plus / au moins n éléments, et avec exactement n c'est une base
- Si F est un s.e.v. de E alors $\dim F \leq \dim E$, avec cas d'égalité
- Base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, concaténer une base de F avec une base de G donne une base de E
- Fragmenter une base en deux sous-familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ entraine que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et $\text{Vect}(\mathcal{G})$ sont supplémentaires ; tout s.e.v. admet un supplémentaire
- Dimension de $F \oplus G$, Formule de Grassman, caractérisations que deux s.e.v. soient supplémentaires
- Caractérisations que E soit de dimension infinie

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Caractérisation que deux s.e.v. soient en somme directe. On devra pouvoir donner la définition d'une somme directe. Chapitre 14, Proposition 14.30
- Si E est de dimension n, que peut-on dire sur les cardinaux de ses familles libres et génératrices ? Chapitre 15, Proposition 15.13
- Caractérisations que deux s.e.v. soient supplémentaires : on ne montrera que l'équivalence entre les assertions 2, 3 et 4 de l'encadré. Chapitre 15, Proposition 15.19