

Programme de colles n°21

semaine du 20 au 24 mars

Notions vues en cours

Chapitre 13 : Analyse asymptotique

- Fonction dominée / négligeable / équivalente à une autre au voisinage d'un point (fini ou infini)
- Notations $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ / $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ / $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ – Note : les définitions s'appuient uniquement sur le quotient $\frac{f}{g}$ et son caractère borné au voisinage de a / sa limite en a
- Négligeabilité entraîne domination, si $\frac{f}{g}$ admet une limite finie en a alors $f \underset{a}{=} O(g)$
- Propriétés de o et O : transitivité, combinaison linéaire, produit, multiplication par un scalaire dans o, O
- Composition à droite dans o, O , reformulation des croissances comparées
- Propriétés de $\underset{a}{\sim}$: c'est une relation d'équivalence, multiplication par un scalaire non nul, produit, quotient, puissance
- $f + g \underset{a}{\sim} g$ ssi $f \underset{a}{=} o(g)$, composition à droite dans un équivalent
- Équivalents classiques en 0, "transitivité" du signe et des limites par équivalent, théorème d'encadrement
- Suite dominée / négligeable / équivalente, notations $u_n = O(v_n)$ / $u_n = o(v_n)$ / $u_n \sim v_n$
- Extension des résultats vus pour les fonctions, composition à droite dans un équivalent ($f \underset{a}{\sim} g$ devient $f \circ u_n \sim g \circ u_n$)
- Interprétation du $o((x - a)^n)$ comme $(x - a)^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, calcul pratique avec des o compte tenu de cette interprétation
- Développement limité à l'ordre n en a , notation $DL_n(a)$, on peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$
- Unicité du $DL_n(a)$, $DL_n(0)$ d'une fonction paire ou impaire, troncature de DL
- Équivalence entre $DL_0(a)$ et continuité (quitte à prolonger par continuité en a). Équivalence entre $DL_1(a)$ et dérivabilité
- Formule de Taylor-Young, formulaire des DL usuels (disponible en ligne)
- Opérations et DL : combinaison linéaire, produit, composition, inverse, intégration
- Calculs pratiques de limites en utilisant DL et/ou équivalents
- Forme normalisée d'un DL , transformation d'un DL en un équivalent

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.

- 3 formules d'équivalents ou de DL choisies par l'examinateur Chapitre 13, Corollaire 13.15 + formulaire en ligne
- Parité d'un DL Chapitre 13, Théorème 13.23
- Formule de Taylor-Young : énoncé uniquement, avec toutes les hypothèses Chapitre 13, Théorème 13.27 + hypothèses sur I et f en début de chapitre