Programme de colles n°20

semaine du 13 au 17 mars

Notions vues en cours

Chapitre 12.B : Polynômes (suite)

- le PGCD de deux polynômes : définition, unicité (en le prenant unitaire) notations $A \wedge B$ et $\mathcal{D}(A)$
- Propriétés "classiques" du PGCD : $(\lambda A) \wedge (\mu B) = A \wedge B$ pour tous λ, μ non nuls, etc.
- Algorithme d'Euclide (y compris étendu), théorème de Bézout-Bachet, couple de coefficients de Bézout
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, $\dfrac{A}{A \wedge B}$ et $\dfrac{B}{A \wedge B}$ sont premiers entre eux, Lemme de Gauss, $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$ entraine $AB \mid C$
- PPCM de deux polynômes : définition, unicité notation $A \vee B$, propriétés classiques, le polynôme $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB
- PGCD d'un nombre fini de polynôme, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble / deux à deux, extension des théorèmes de Bézout et Bézout-Bachet
- Racine d'un polynôme, caractérisation par la division, extension avec un nombre fini de racines, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines distinctes
- Multiplicité d'une racine, racine simple / multiple / double / triple, caractérisations de la multiplicité avec divisibilité / factorisation / dérivées
- Polynôme scindé (par convention, les polynômes constants non nuls le sont), polynôme scindé à racines simples, relations coefficients-racines
- Un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité (il est scindé s'il en admet exactement n, et scindé à racines simples si en plus la multiplicité de chaque racine est 1)
- Polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$, si $\deg P \geq 2$ et P admet une racine dans $\mathbb{K}$ alors P n'est pas irréductible sur $\mathbb{K}$
- Théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$, $A \wedge B = 1$ ssi A et B n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$
- Description des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

Chapitre 12.C : Fractions rationnelles

- Fraction rationnelle, ensemble $\mathbb{K}(X)$, une même fraction a plusieurs écritures, c'est un corps pour $+$ et $\times$
- Fraction irréductible, se ramener à une fraction irréductible, degré d'une fraction
- Racine et pôle d'une fraction (avec la notion de multiplicité), *fonction* rationnelle
- Décomposition en éléments simples : partie entière, forme générale sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, aperçu de "recettes de cuisine" pour trouver les coefficients

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Caractérisation de $(X - \alpha)^r \mid P$ en fonction de $P^{(k)}(\alpha)$ Chapitre 12.B, Propriété 36
- Forme générale d'une décomposition sur $\mathbb{C}[X]$ puis sur $\mathbb{R}[X]$: seul l'énoncé est demandé, en rappelant bien toutes les hypothèses sur chaque variable de la décomposition Chapitre 12.B, Corollaire 46 (point 2) et Théorème 48 (point 2)
- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle "gentille" donnée par l'examinateur. Chapitre 12.C, suivre l'encadré Méthode au début de 3.4