Programme de colles n°19

semaine du 6 au 10 mars

Notions vues en cours

Chapitre 12 : Polynômes

- Suite presque nulle, polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, coefficients d'un polynôme
- Ensemble $\mathbb{K}[X]$, lois $+$ et multiplication par un scalaire sur $\mathbb{K}[X]$, $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, terme dominant, terme constant, degré de $P+Q$, de λP
- Vu en TD: si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $\deg P \leq n$; si de plus $a_n \neq 0$ alors $\deg P = n$
- Polynôme unitaire, monôme, ensemble $\mathbb{K}_n[X]$, caractérisations de $P \in \mathbb{K}_0[X]$ et $P \in \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$
- Produit de polynômes, bilinéarité du produit, $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif
- Degré de PQ, $\mathbb{K}[X]$ est intègre, les éléments inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls
- Puissance d'un polynôme, degré de P^n, calcul dans un anneau version polynômes
- Composition de polynômes : définition, associativité, degré de $P \circ Q$
- Fonction polynômiale $\widetilde{P} \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, l'application $P \mapsto \widetilde{P}$ est bijective et "compatible" avec les lois $+, \times, \lambda\cdot, \circ$ définies sur $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Polynôme dérivé P', compatibilité $\widetilde{P'} = \widetilde{P}'$, degré de P', dérivées de $\lambda P + \mu Q$, de PQ et de $P \circ Q$
- Dérivée n-ième de P, notation $P^{(k)}$, degré de $P^{(n)}$, dérivées n-ièmes de $\lambda P + \mu Q$, de PQ et de $P \circ Q$
- Évaluation de P en $\alpha \in \mathbb{K}$, notation $P(\alpha)$, Formule de Taylor, si $P = \sum a_k X^k$ alors $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, notation $B \mid A$, conséquences sur les degrés de A et B
- $D \mid A$ et $D \mid B$ entraine que pour tous U, V, on a $D \mid AU + BV$; $AB \mid AC$ ssi $B \mid C$
- La relation $\mid$ est réflexive, transitive, polynômes associés, équivalence avec $B \mid A$ et $A \mid B$
- Division euclidienne de A par $B \neq 0$, on a $B \mid A$ si et seulement si le reste est nul, calcul pratique de division euclidienne, détermination du reste sans faire de division lorsque B est de petit degré

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Étant donnés $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$: que peut-on dire des degrés de λP, $P+Q$, PQ, de P^n, de P', de $P^{(n)}$ et de $P \circ Q$? Aucune démonstration n'est demandée Chapitre 12, Propriété 22 (uniquement sur la version en ligne)
- Théorème de la division euclidienne : énoncé, puis démonstration de l'unicité Chapitre 12, Théorème 19 (papier) ou Théorème 20 (en ligne)
- Réaliser une division euclidienne de deux polynômes donnés par l'examinateur. Le premier polynôme devra être de degré au moins 5, le second de degré 2 ou 3 et ne pas être unitaire. Chapitre 12, Exemple 12