Programme de colles n°17

semaine du 6 au 10 février

Notions vues en cours

Chapitre 10 : Structures algébriques

- Calcul dans un anneau : $0_A a = a 0_A = 0_A$, distributivité de $\times$ sur $-$, formule du binôme, formule $a^n - b^n$
- Morphisme d'anneaux : définition, iso- / endo- / automorphisme
- Élément inversible dans un anneau, inverse d'un élément, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ et $(a^{-1})^{-1} = a$, on peut simplifier à droite ou à gauche par un élément inversible
- L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ est un groupe pour la loi $\times$
- Diviseur de zéro, anneau intègre, dans un anneau intègre on peut simplifier à droite ou à gauche par un élément non nul
- Corps, tout corps est un anneau intègre, (Hors-programme mais vu en cours :) définition et caractérisation de sous-corps

Chapitre 11 : Calcul matriciel et résolution pratique de systèmes linéaires

- Matrice de taille (n, p), ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, coefficient d'indice (i, j) de A, on peut le noter a_{ij}
- Matrice ligne / colonne / carrée, ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- Somme de matrice, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe, matrice nulle $0_{n,p}$, multiplication d'une matrice par un scalaire
- Produit de matrices : c'est une application de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, associativité / bilinéarité du produit
- Anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, matrice identité I_n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif si $n \geq 2$
- Matrice scalaire, diagonale, notation $\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire (tri. inférieure, tri. supérieure).
- Rajout par rapport au polycopié : matrice triangulaire inférieure stricte / supérieure stricte, matrice nilpotente
- Notations $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$; $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$; $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$
- Formules du produit de matrices diagonales / triangulaires inférieures / triangulaires supérieures
- Puissance k-ième de A, formule pour les matrices diagonales.

La notion de matrice nilpotente n'est pas au programme : elle doit être rappelée dans les énoncés des exercices.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Définition de morphismes d'anneaux ; Donner aussi l'énoncé (sans démonstration) du "Calcul dans un anneau" (les formules $(a + b)^n$ et $a^n - b^n$) Chapitre 10, Proposition 10.25 et Définition 10.28
- Définition d'anneau intègre, de corps. Démontrer que tout corps est un anneau intègre. La réciproque est-elle vraie ? Chapitre 10, Items 10.33 à 10.35
- Associativité du produit matriciel pour des matrices de tailles a priori distinctes Chapitre 11, Proposition 11.7