Programme de colles n°16

semaine du 30 janvier au 3 février

Notions vues en cours

Chapitre 10 : Structures algébriques

- Loi de composition interne (commutative, associative), définition de “deux éléments commutent”
- Élément neutre (souvent noté e), élément symétrisable, élément symétrique, groupe, groupe commutatif (ou abélien)
- Groupes usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ munis de $+$; $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ munis de $\times$, notations additive et multiplicative
- Dans un groupe, unicité de l'élément neutre et de l'élément symétrique, formules $(x^{-1})^{-1} = x$ et $(x \top y)^{-1} = y^{-1} \top x^{-1}$ (si la loi est notée $\top$)
- Calcul dans un groupe : dans une égalité, on peut passer au symétrique ou multiplier (à gauche ou à droite) par un élément quelconque du groupe.
- Partie stable par une l.c.i., loi induite (qu'on note souvent comme la loi initiale)
- Sous-groupe : définition, caractérisations, tout sous-groupe contient e, $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G
- Morphismes de groupes : définition, iso- / endo- / automorphisme, image de l'élément neutre et du symétrique par un morphisme
- L'image directe et l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe
- Noyau et image d'un morphisme, notations $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$, ce sont des sous-groupes, caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité
- Loi produit, groupe produit, élément neutre et symétrique d'un groupe produit
- Anneau, anneau commutatif, élément nul 0_A, élément unité 1_A. Anneaux usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ munis de $+$ et $\times$
- Sous-anneau : définition, caractérisation

La notion de groupe de permutations d'un ensemble sera vue à un chapitre ultérieur.

Le calcul dans des anneaux doit rester, pour cette semaine, à un stade simple.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Propriétés vérifiées par un morphisme (formules $f(e) = e'$, $f(x^{-1}) = x^{-1}$ et $f(x^n) = f(x)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$). *On ne démontrera que les deux premières formules.* Chapitre 10, Proposition 10.16
- Les images directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme sont des sous-groupes Chapitre 10, Propoition 10.17
- Définition complète d'un anneau et énoncé (sans démonstration) de la caractérisation d'un sous-anneau Chapitre 10, Définition 10.24 et Proposition 10.27