

Programme de colles n°15

semaine du 23 au 27 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 9 : Arithmétique

- Valuation p -adique : définition, on la “lit” sur la décomposition en produits de facteurs premiers
- Décomposition (dite généralisée) d’un entier $n \in \mathbb{N}^*$ selon un ensemble de nombres premiers $\{p_1, \dots, p_r\}$ qui contient tous les facteurs premiers de n (les exposants peuvent alors être nuls)
- Valuation du produit / pgcd / ppcm, lien entre les valuations et la divisibilité / l’égalité de deux entiers
- Calcul pratique du pgcd et du ppcm en utilisant décomposant les entiers
- Crible d’Ératosthène, n est premier si et seulement si aucun nombre premier p inférieur à \sqrt{n} ne divise n .
- Congruence : définition, relation d’équivalence, lien avec le reste de la division euclidienne
- Congruence et opérations : addition, soustraction, multiplication (par une constante ou terme à terme d’une autre congruence), puissance
- Inverse d’un entier a modulo n : définition, existence ssi $a \wedge n = 1$, “division” dans une congruence (on multiplie par l’inverse)
- Résolution d’une équation $ax \equiv b \pmod{n}$
- Petit théorème de Fermat (cas général, cas où l’entier est premier avec p)
- Résolution d’une équation diophantienne du type $ax + by = c$

Chapitre 10 : Structures algébriques

- Loi de composition interne (commutative, associative), définition de “deux éléments commutent”
- Élément neutre, élément symétrisable, élément symétrique, groupe, groupe commutatif (ou abélien)
- Groupes usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ munis de $+$; $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ munis de \times , notations additive et multiplicative
- Dans un groupe, unicité de l’élément neutre et de l’élément symétrique, formules $(x^{-1})^{-1} = x$ et $(x \top y)^{-1} = y^{-1} \top x^{-1}$ (si la loi est notée \top)

Les exercices sur les groupes doivent rester très basiques et constituer une simple application des notions ci-dessus.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.

- Résolution d’une équation de la forme $ax \equiv b \pmod{n}$, où a, b, n sont choisis par l’examineur Chapitre 9, Méthode page 20
- Résolution d’une équation de la forme $ax + by = c$, où a, b, c sont choisis par l’examineur Chapitre 9, Méthode page 22
- Définition complète d’un groupe (y compris groupe commutatif), puis unicité de l’élément neutre et de son symétrique Chapitre 10, Définition 10.5 et Proposition 10.6