Programme de colles n°14

semaine du 16 au 20 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 9 : Arithmétique

- Relation "divise", l'ensemble des diviseurs de a est noté $\mathcal{D}(a)$, celui des multiples de a est $a\mathbb{Z}$
- Divise restreint à $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Sur $\mathbb{Z}$, non : si $a \mid b$ et $b \mid a$, on dit que a, b sont associés
- Division euclidienne : théorème, cas où le reste est nul
- Si $a = bq + r$, les diviseurs communs à a et b sont exactement les diviseurs communs à b et r
- PGCD de deux entiers (non tous les deux nuls), notation $a \wedge b$, $\mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b) = \mathcal{D}(a \wedge b)$, algorithme d'Euclide
- Théorème de Bézout-Bachet, couple de coefficients de Bézout de deux entiers, algorithme d'Euclide étendu
- Entiers premiers entre eux, théorème de Bézout, $\dfrac{a}{a \wedge b}$ et $\dfrac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux, forme irréductible d'une fraction
- Lemme de Gauss ; $(a_1 \wedge b = 1 \text{ et } a_2 \wedge b = 1) \implies (a_1 a_2) \wedge b = 1$; $(a \mid c \text{ et } b \mid c \text{ et } a \wedge b = 1) \implies ab \mid c$
- PGCD de n entiers (non tous nuls), notation $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$, entiers premiers dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux
- Généralisation des Théorèmes de Bézout-Bachet et de Bézout à n entiers, algorithme d'Euclide étendu à n entiers (principe)
- PPCM de deux entiers non nuls, $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$, formule $(a \vee b)(a \wedge b) = |a| \times |b|$
- Nombre premier, lemme d'Euclide, tout entier admet un diviseur premier, décomposition en produit de facteurs premiers

La notion de congruence est hors programme cette semaine.

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.

- Division euclidienne (existence *et* unicité) Chapitre 9, Théorème 9.6
- Théorème de Bézout-Bachet et Théorème de Bézout : on ne fera les démonstrations que dans le cas $a, b \in \mathbb{N}$ Chapitre 9, Théorèmes 9.12 et 9.14
- Décomposition en produit de facteurs premiers : on ne démontrera que l'existence d'une telle décomposition Chapitre 9, Théorèmes 9.32