

# Programme de colles n°13

semaine du 9 au 13 janvier

## Notions vues en cours

### Chapitre 8.5 : Dérivation

- Une fonction ( $K$ -)contractante admet au plus un point fixe (l'existence est hors-programme)
- Pour une suite récurrente  $u_{n+1} = f(u_n)$ , si  $f$  est contractante et  $f$  admet un (unique) point fixe, alors  $(u_n)$  converge vers ce point fixe
- Théorème de la limite de la dérivée
- Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne avec  $K = \max_{[a,b]} |f'(x)|$
- Fonction de classe  $C^n$ , de classe  $C^\infty$ . Ensembles  $C^n(I, \mathbb{R})$  et  $C^\infty(I, \mathbb{R})$
- Opérations sur  $C^n(I, \mathbb{R})$  : combinaisons linéaires, produit avec la formule de Leibniz, quotient, composition
- Si  $f$  est bijective de classe  $C^n$  et que  $f'$  ne s'annule pas, alors  $f^{-1}$  est de classe  $C^n$
- Fonctions complexes : généralisations des résultats, plus de Rolle ou de TAF, mais l'IAF est encore valide.

### Chapitre 8.9 : Convexité

- Fonction convexe : définition, caractérisation avec les cordes
- Inégalité de Jensen, inégalité des pentes (qui est aussi une caractérisation)
- Si  $f$  est croissante, son taux d'accroissement (en un point quelconque) est croissant
- Caractérisation de la convexité avec les variations de la dérivée
- Caractérisation de la convexité avec le signe de la dérivée seconde
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à sa tangente
- Fonction concave : adaptation de tous les résultats précédents

## Questions de cours

*Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.*

- Formule de Leibniz : énoncé *sans démonstration*, puis application sur un exemple simple, choisi par l'examinateur. Chapitre 8.5, Proposition 8.30
- Inégalité des pentes : énoncé complet, mais on ne démontrera qu'une inégalité Chapitre 8.9, Proposition 8.3
- Démontrer que si  $f'$  est croissante alors  $f$  est convexe Chapitre 8.9, Proposition 8.9
- Position de la courbe par rapport à sa tangente Chapitre 8.9, Proposition 8.11