

Programme de colles n°11

semaine du 12 au 16 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 8 : Limites, continuité

- Une fonction vérifie une propriété \mathcal{P} *au voisinage* d'un point ou de $\pm\infty$
- Limite d'une fonction : finie ou infinie, en un point ou à l'infini. Unicité de cette limite
- Admettre une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ implique d'être bornée au voisinage de a
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Limites et inégalités : passage à la limite, théorème d'encadrement
- Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, composition. Si f est bornée et g tend vers zéro, alors fg tend vers zéro.
- Limite à gauche, limite à droite. L'existence d'une limite implique l'existence d'une limite à gauche et à droite
- Théorème de la limite monotone
- Continuité en un point, discontinuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité à gauche, à droite. La continuité en un point équivaut à la continuité à gauche et à droite
- Limite en a de $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque a n'est pas une extrémité de I . Prolongement par continuité
- Limite épointée en a de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lorsque a n'est pas une extrémité de I . Notation $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$
- Continuité sur un intervalle. Ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$. Par extension, continuité sur une partie $X \subset \mathbb{R}$
- Opérations et continuité : somme, produit, inverse, composition (en un point, sur un intervalle)
- Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est de plus strictement monotone, alors l'antécédent est unique
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe (strict) constant

Questions de cours

Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaître.

- Unicité de la limite (on ne démontrera que le cas de limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$) Chapitre 8, Proposition 8.8
- Théorème d'encadrement (on ne démontrera que le cas d'une limite en un point $a \in \mathbb{R}$, cf polycopié en ligne pour la preuve attendue) Chapitre 8, Théorème 8.11
- Théorème de la limite monotone (on ne donnera l'énoncé et la démonstration que dans le cas d'une fonction croissante) Chapitre 8, Théorème 8.18