

Chapitre 8

Dérivation (suite du précédent)

Plan du chapitre

1	Dérivée	1
1.1	Nombre dérivé	1
1.2	Fonction dérivée.	3
1.3	Opérations sur les dérivées	4
1.4	Dérivées à droite et à gauche	6
2	Extremum	7
3	Rolle, TAF et leurs conséquences	8
3.1	Rolle	8
3.2	TAF	9
3.3	Dérivation et monotonie.	10
3.4	IAF et fonctions lipschitziennes	11
3.5	Retour sur $u_{n+1} = f(u_n)$	12
3.6	Théorème de la limite de la dérivée.	14
4	Fonctions de classe C^n	15
4.1	Fonctions de classe C^1	15
4.2	Classe C^n : définition	16
4.3	Classe C^n : propriétés	16
5	Fonctions complexes	18

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non singleton. De plus, a est un point de I (donc forcément fini).

1 Dérivée

1.1 Nombre dérivé

Définition 8.1 (Nombre dérivé)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite en a .
 Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelé nombre dérivée en a . Il est noté $f'(a)$.

Remarque.

- On trouve aussi la notation $\frac{df}{dx}(a)$ en physique.
- Dit autrement, lorsque la limite existe, on a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

- En posant $x = a + h$ dans la limite ci-dessus, on peut réécrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Remarque (Nombre dérivée et tangente). Lorsque f est dérivable en a , la courbe C_f admet une tangente en a d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque (Taux d'accroissement et pente de la corde). Pour $a \in I$ fixé, l'application

$$\tau_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelée taux d'accroissement de f en a . $\tau_a(x)$ représente la pente de la corde qui relie le point $(a, f(a))$ au point $(x, f(x))$ de la courbe C_f .

Proposition 8.2 (Développement limité d'ordre un)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable en a .
2. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + \ell(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \quad (*)$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a alors $\ell = f'(a)$.

Lorsque f vérifie $*$, on dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en a . En posant $x = a + h$ et $\alpha(h) := \varepsilon(a + h)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$, $*$ se réécrit comme

$$f(a + h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$$

Démonstration. Supposons 2 et montrons 1. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on réécrit $*$ ainsi :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell$$

Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, on en déduit que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

de sorte que f est dérivable en a et $\ell = f'(a)$. Ainsi, 1 est vraie.

Supposons maintenant 1 et montrons 2. Pour tout $x \in I$, on pose

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

On vérifie alors que la première assertion de 2 est vraie avec $\ell = f'(a)$: si $x \in I \setminus \{a\}$ c'est une réécriture, et pour $x = a$, cela revient à écrire $f(a) = f(a) + 0 + 0$. Enfin, comme f est dérivable en a , il est clair que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(a)$. Ainsi, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$. □

Proposition 8.3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration.

□

1.2 Fonction dérivée

Définition 8.4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de I . On note alors

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

et on appelle f' l'application dérivée de f ou simplement la dérivée de f .

Remarque. Par abus de langage, on dit parfois que f est dérivable sur un ensemble qui n'est pas forcément un intervalle, lorsque cet ensemble est une réunion disjointe d'intervalles non vides et non réduit à un point : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dite dérivable sur \mathbb{R}^* car elle l'est sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Exemple 1. $\cos' = -\sin$.

Si $f : x \mapsto \sqrt{x}$, alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Attention ! La notation $'$ est réservée aux *fonctions* : on évitera donc d'écrire " $(\sqrt{x})'$ " ou " $(x^n)'$ ", car x^n et \sqrt{x} sont des nombres, pas des fonctions. Par contre \cos' et $\arctan'(x)$ ont un sens au même titre que f' et $f'(x)$ pour une fonction dérivable.

Proposition 8.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est dérivable (sur I), alors f est continue (sur I).

Démonstration. Soit $a \in I$. Comme f est dérivable sur I , elle est dérivable en a . Ainsi, f est continue en a . Par arbitraire sur a , on en déduit que f est continue sur I . □

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 8.6 (Somme, produit, inverses)

Soient $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u, v sont dérivables sur I , alors :

1. Pour tous réels λ, μ , la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$.
2. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$.
3. Si u ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
4. Si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ce théorème est également vrai si on remplace les mots "sur I " par "en a " et qu'on modifie les formules en les évaluant au point a . Par exemple, si u, v sont dérivables en a , alors uv aussi et

$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$$

Démonstration. Cf Chapitre 5 pour un exemple. □

Exemple 2 (Important). Toute fonction polynômiale est dérivable sur \mathbb{R} . Toute fonction rationnelle est dérivable là où elle est définie.

Théorème 8.7 (Composition)

Soit J un intervalle non vide et non singleton. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

Si f est dérivable (sur I) et g est dérivable (sur J), alors $g \circ f$ est dérivable (sur I) et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Démonstration.

□

Exemple 3 (Formules importantes). En notant $u = f$, on a donc $(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$. Ainsi, si on prend...

- $g : x \mapsto e^x$, alors $g'(x) = e^x$ et donc $(e^u)' = e^u \times u'$.
- $g : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $g'(x) = nx^{n-1}$ et donc

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

- $g : x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $g'(x) = -nx^{-n-1}$ et donc

$$(u^{-n})' = -nu^{-n-1}u' = -n\frac{u'}{u^{n+1}}$$

- $g : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et donc

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$$

Théorème 8.8 (Inverse)

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et continue sur I et dérivable en $a \in I$. Soit $b = f(a) \in J$. La fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable en b si et seulement si $f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Lorsque c'est le cas,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration. On raisonne par double implication. Supposons f^{-1} dérivable en $b = f(a)$. Comme f est dérivable en a , alors $f^{-1} \circ f$ est dérivable en a et

$$(f^{-1} \circ f)'(a) = (f^{-1})'(f(a)) \times f'(a) = (f^{-1})'(b) \times f'(a)$$

Or, $f^{-1} \circ f = \text{id}$, et id' est la fonction constante égale à 1. Ainsi, $(f^{-1})'(b) \times f'(a) = 1$ et on voit que cela entraîne nécessairement $f'(a) \neq 0$.

On ne démontrera pas l'autre sens. □

Rappel : pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\arcsin x) \geq 0 \implies \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(\arccos x) \geq 0 \implies \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

Exemple 4. arcsin est dérivable en tout point $x \in [-1, 1]$ tel que $\sin'(\arcsin x) \neq 0$, c'ad $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2} \neq 0$. Donc pour tout $x \in]-1, 1[$, arcsin est dérivable et

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

1.4 Dérivées à droite et à gauche

Définition 8.9

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On suppose que $a \neq \sup(I)$. On dit que f est dérivable à droite en a si la fonction $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est dérivable en a , et on pose

$$f'_d(a) := (f|_{I \cap [a, +\infty[})'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- On suppose que $a \neq \inf(I)$. On dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est dérivable en a , c'est-à-dire si

$$f'_g(a) := (f|_{I \cap]-\infty, a]})'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque.

- Si f est dérivable à droite en a , elle est continue à droite en a : il suffit d'appliquer la Proposition 8.3 à $f|_{I \cap [a, +\infty[}$.

- Si $a = \sup(I)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et donc f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a .

Proposition 8.10

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que a n'est pas une extrémité de I . Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a ET que $f'_g(a) = f'_d(a)$.
Dans ce cas, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 5. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 : on a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Cependant, f n'est pas dérivable en 0.

2 Extremum

Définition 8.11 (Extremum global)

Soient D une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum (global) en a si $\forall x \in D \quad f(x) \leq f(a)$
- On dit que f admet un minimum (global) en a si $\forall x \in D \quad f(x) \geq f(a)$
- On dit que f admet un extremum (global) en a si f admet en a un maximum ou un minimum.

Attention : on ne dit pas " a est un maximum de f ".

On notera que si f admet un maximum en a , alors $-f$ admet un minimum en a .

Définition 8.12 (Extremum local)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum local en a si

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta] \quad f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f admet un minimum local en a si

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a - \eta, a + \eta] \quad f(x) \geq f(a)$$

- On dit que f admet un extremum local en a si f admet en a un maximum local ou un minimum local.

Formulation équivalente : f admet un maximum local en a si $f \leq f(a)$ au voisinage de a .

Remarque (Local et global). Un extremum global est un extremum local. La réciproque est fautive : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet un maximum local en 0 mais ce n'est pas un maximum global.

Définition 8.13

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Dit autrement, un point critique est un point où f possède une tangente horizontale.

Théorème 8.14

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en a , et si a n'est pas une extrémité de I , alors a est un point critique de f .

Démonstration. On démontre ce résultat lorsque f admet en a un maximum local. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a - \eta, a + \eta]$, on a $f(x) \leq f(a)$, donc

$$f(x) - f(a) \leq 0$$

- Si $x > a$, on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$. D'où

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

- Si $x < a$, on a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$. D'où

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

Finalement, $0 \leq f'(a) \leq 0$ donc $f'(a) = 0$. □

Remarque (Lorsque a est au bord). Le théorème tombe en défaut si a est une extrémité de I : par exemple la fonction identité sur $[0, 1]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1 alors que ce ne sont pas des points critiques.

Remarque (Un point critique n'est pas forcément un extremum). Un extremum est nécessairement un point critique, mais la réciproque est fautive. Par exemple, 0 est un point critique de $f : x \mapsto x^3$, mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Méthode

Pour trouver un extremum global, on peut recourir à un tableau de variations.
Pour un extremum local, cela marche aussi, mais on verra d'autres outils plus précis plus tard.

3 Rolle, TAF et leurs conséquences

3.1 Rolle

Théorème 8.15 (Théorème de Rolle)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Faites un joli dessin

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, elle admet un maximum (global) sur $[a, b]$ et un minimum (global) sur $[a, b]$.

- Si f admet un maximum en un point $x_M \in]a, b[$, alors comme f est dérivable en x_M et que x_M n'est pas une extrémité de $[a, b]$, il s'agit d'un point critique. Donc $f'(x_M) = 0$.
- Si f admet un minimum en un point $x_m \in]a, b[$, alors comme f est dérivable en x_m et que x_m n'est pas une extrémité de $[a, b]$, il s'agit d'un point critique. Donc $f'(x_m) = 0$.
- Si f n'atteint pas son maximum ni son minimum en tout point de $]a, b[$, alors ils sont tous les deux atteints sur les extrémités a et b . Par exemple f admet un minimum en a et un maximum en b , de sorte que $f(a) \leq f \leq f(b)$. Alors, comme $f(a) = f(b)$, on en déduit que f est constante sur $[a, b]$. Alors, en tout point $c \in]a, b[$, on a $f'(c) = 0$.

□

3.2 TAF**Théorème 8.16 (Théorème des Accroissements Finis)**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Faites un joli dessin

Démonstration. On pose

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ comme somme et produit de telles fonctions. De plus

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a)$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$$

Ainsi, $g(b) = g(a)$. Donc par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. D'où

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On en déduit que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

3.3 Dérivation et monotonie

Définition 8.17

On dit qu'un point $a \in I$ est un point intérieur de I si a n'est pas une extrémité de l'intervalle I .

Théorème 8.18

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I . Alors

- f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ en tout point intérieur de l'intervalle I .
- f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ en tout point intérieur de l'intervalle I .
- f est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de l'intervalle I .

Exemple 6. Contre-exemple : la fonction "signe" définie sur \mathbb{R}^* est dérivable sur \mathbb{R}^* de dérivée 1, mais n'est pas constante.

Démonstration. On ne montre que le cas f croissante. On procède par double implication.

- Supposons $f' \geq 0$ en tout point intérieur à I et montrons que f est croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Alors par le TAF appliqué à $f|_{[x,y]}$, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$(f|_{[x,y]})'(c) = f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Alors $f'(c) \geq 0$, et comme $y - x > 0$, on a $f(y) - f(x) \geq 0$, si bien que $f(x) \leq f(y)$. Par arbitraire sur x, y , on en déduit que f est croissante.

- Supposons f croissante. Soit x un point intérieur de I : montrons que $f'(x) \geq 0$. Soit $y \in I$ tel que $y > x$. Comme f est croissante,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

et en passant à la limite quand y tend vers x^+ , comme f est dérivable en x , on obtient $f'(x) \geq 0$. □

Théorème 8.19

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est strictement croissante sur I .
- $f' \geq 0$ en tout point intérieur de I , et pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f'|_{a,b[} \not\equiv 0$.

En particulier, si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points, alors f est strictement croissante.

Exemple 7. La fonction $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} car sa dérivée est positive et ne s'annule que sur $2\pi\mathbb{Z}$.

3.4 IAF et fonctions lipschitziennes

Définition 8.20 (Fonction lipschitzienne)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est K -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Une fonction est dite lipschitzienne si elle est K -lipschitzienne pour un $K \geq 0$.

Si de plus $K < 1$, on dit que f est K -contractante (ou juste contractante).

Faites un joli dessin

Exemple 8. Une fonction est 0-lipschitzienne si et seulement si elle est constante.

$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne (mais aussi 2-lipschitzienne, π -lipschitzienne...)

$x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne, mais sa restriction à $[-1, 1]$ est lipschitzienne.

Proposition 8.21

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Comme le montre le théorème suivant, une fonction lipschitzienne est en quelque sorte un intermédiaire entre une fonction dérivable et une fonction continue. Il faut toutefois que la dérivée soit bornée.

Théorème 8.22 (Inégalité des Accroissements Finis)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I .

S'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout point x intérieur à I , on a $|f'(x)| \leq K$, alors f est K -lipschitzienne.

Démonstration. Soient $x, y \in I$. Montrons que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $x = y$, c'est évident. Si $x \neq y$, quitte à échanger les rôles de x et y , on peut considérer que $x < y$. Appliquons le TAF à f sur $[x, y]$:

- f est continue sur $[x, y]$ car f l'est sur I .
- f est dérivable sur $]x, y[$ car tout point de $]x, y[$ est nécessairement un point intérieur de I (même si x ou y sont des extrémités de I).

Ainsi, il existe $c \in]x, y[$ tel que $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$ donc

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(c)| \leq K$$

D'où on conclut en multipliant par $|x - y| \geq 0$. □

Remarque. L'implication du IAF est en fait une équivalence : si f est K -lipschitzienne (et dérivable en tout point intérieur de I), alors $|f'|$ est majorée par K .

3.5 Retour sur $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition 8.23

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -contractante. Alors f admet au plus un point fixe.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe deux points fixes $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$. Comme $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, on a

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

et en divisant par $|x_1 - x_2| \neq 0$, on en déduit que $1 \leq K$. Contradiction car $K < 1$ par définition. □

Théorème 8.24

Soit $f : I \rightarrow I$ une application contractante. On suppose que f admet un (unique) point fixe $\ell \in I$. Alors toute suite u définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \end{cases}$$

est convergente : sa limite est ℓ .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K |u_n - \ell|$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que

$$|u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell| \rightarrow 0$$

car $K < 1$. Ainsi $u_n \rightarrow \ell$. □

Exemple 9. Étudier la nature de la suite définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = 1 - \frac{1}{3}e^{u_n} \\ u_0 \in [0, 1] \end{cases}$.

3.6 Théorème de la limite de la dérivée

On suppose qu'on a une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dont on sait qu'elle est dérivable sur $I \setminus \{a\}$. On voudrait savoir si f est également dérivable en a . Une solution peut être de revenir à la définition, c'est-à-dire étudier la limite du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a .

Mais parfois, ce taux est très compliqué... et le résultat suivant affirme qu'il suffit d'étudier la limite de $f'(x)$ quand x tend vers a (avec $x \neq a$). Dans certains (rares) cas, c'est plus facile.

Théorème 8.25 (Théorème de limite de la dérivée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite épointée finie en a , c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. En particulier, f' est continue en a et on peut écrire $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell$.

Si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \pm\infty$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, et donc f n'est pas dérivable en a .

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On pose

$$J = \begin{cases}]a, x[& \text{si } x > a \\]x, a[& \text{si } x < a \end{cases}$$

Appliquons le TAF à f sur cet ensemble. f est continue sur I donc sur l'intervalle fermé correspondant à J . De plus f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc sur J . Ainsi, le TAF s'applique et il existe $c_x \in J$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or, comme $c_x \in J$, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} c_x = a \quad \text{avec } c_x \neq a$$

De plus, par hypothèse, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell$. Par composition, on a donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(c_x) = \ell \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Cela implique bien que f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$. □

Exemple 10. Montrer que $f : x \mapsto \arcsin(1 - x^4)$ est dérivable en 0.

4 Fonctions de classe C^n

4.1 Fonctions de classe C^1

Définition 8.26

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 (sur I) si f est dérivable sur I et que sa dérivée est continue. On dit parfois aussi que f est continûment dérivable (sur I).

Attention : une fonction dérivable n'est pas toujours de classe C^1 . Contre-exemple : la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0 mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

Proposition 8.27

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Alors f est K -lipschitzienne avec $K = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Démonstration. Comme f est de classe C^1 , f' est continue sur $[a, b]$ donc il en va de même pour $|f'| : |f'|$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son maximum et on peut poser

$$K := \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$$

Alors, par l'IAE, pour tous $x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

□

Dans le théorème ci-dessus, on s'est restreint à $[a, b]$ pour assurer que f atteint son maximum sur $[a, b]$. Plus généralement, pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| \leq K$$

alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, en appliquant l'IAE à $[x, y]$, on obtient que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, c'est-à-dire f est K -lipschitzienne sur I .

Exemple 11. La fonction arctan vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\arctan'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

donc arctan est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .

4.2 Classe C^n : définition

Rappel : pour $n \in \mathbb{N}$, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est n fois dérivable en a , on note $f^{(n)}(a)$ sa dérivée n -ième en a . Lorsque f est n fois dérivable (sous-entendu en tout point $a \in I$), on peut définir sa dérivée n -ième comme une fonction $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$. Par exemple :

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= f'' \end{aligned}$$

Définition 8.28 (Classe C^n et C^∞)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe C^n si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de classe C^∞ si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

On note $C^n(I, \mathbb{R})$ ou juste $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ ou juste $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

Remarque.

- En particulier $C^0(I) = C(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} .
- Comme toute fonction dérivable est continue, si f est $(n + 1)$ fois dérivable, alors f est de classe C^n . En particulier,

$$C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset \dots \supset C^\infty(I)$$

-

$$C^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$$

Exemple 12 (Important). Toute fonction polynômiale est de classe C^∞ . Toute fonction rationnelle est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.

Exemple 13. Les fonctions \exp , \ln , \cos , \sin , \tan ... sont de classe C^∞ (sur leur ensemble de définition).

Si $f : x \mapsto |x|$, alors $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais $f \notin C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0.

Si $f : x \mapsto x^{3/2}$, alors $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ mais $f \notin C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ car $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, donc f' n'est pas dérivable en 0.

4.3 Classe C^n : propriétés

Proposition 8.29 (Combinaisons linéaires)

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f, g \in C^n(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g \in C^n(I)$ et si $n \neq +\infty$,

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

Proposition 8.30 (Produit – Formule de Leibniz)

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f, g \in C^n(I)$. Alors $fg \in C^n(I)$ et si $n \neq +\infty$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple 14. Calculer la dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 8.31 (Quotient)

Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f, g \in C^n(I)$. Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g} \in C^n(I)$.

Proposition 8.32 (Composition)

Soit J un intervalle non vide, non singleton. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ et $g \in C^n(J, \mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in C^n(I)$.

Démonstration. Admise. □

Proposition 8.33 (Réciproque)

Soit J un intervalle non vide, non singleton. Soient $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $f : I \rightarrow J$ une bijection de classe C^n . Si la dérivée première f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est de classe C^n (sur J).

Démonstration. Admise. □

Exemple 15. On peut montrer que la fonction $f : x \mapsto xe^x$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , et est de classe C^n sur \mathbb{R}_+ .

Sa dérivée $f' : x \mapsto (1+x)e^x$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+ . Donc $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ et est de classe C^n .

Remarque. Attention on doit avoir $n \geq 1$. Cela ressemble au théorème de la bijection, mais cette fois avec des dérivées. Comme f' ne s'annule pas sur I , son signe (strict) est constant sur I et on a gratuitement la stricte monotonie de f .

5 Fonctions complexes

Définition 8.34

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a . On note alors

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$$

Cette limite est appelée nombre dérivée de f en a .

Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on définit alors sa dérivée $f' : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Proposition 8.35

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

1. $f \in C^n(I, \mathbb{C})$ si et seulement si $\bar{f} \in C^n(I, \mathbb{C})$, et dans ce cas

$$\bar{f}^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$$

2. $f \in C^n(I, \mathbb{C})$ si et seulement si $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^n(I, \mathbb{C})$, et dans ce cas

$$f^{(n)} = (\operatorname{Re} f)^{(n)} + i (\operatorname{Im} f)^{(n)}$$

Ce qui ne change pas

On peut généraliser les notions suivantes :

- Fonctions de classe $C^n(I, \mathbb{C})$ et $C^\infty(I, \mathbb{C})$.
- Opérations sur les dérivées et les fonctions de classe C^n et/ou C^∞ : combinaisons linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient. Pour la composition $g \circ f$, le cadre est $g : J \rightarrow \mathbb{C}$ et $f : I \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$ pour que $f(I) \subset J$.
- Dérivées à gauche, à droite en a .

Ce qui change

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

- Les notions de maximum, minimum de f n'a pas de sens car il n'y a pas d'inégalités sur \mathbb{C} .
- Rolle et le TAF sont faux : par exemple si $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $f(t) = e^{it}$, alors f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi) = 0$ mais f' ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$. En effet

$$|f'(t)| = |ie^{it}| = 1 \neq 0$$

- L'IAF par contre demeure, il faut juste remplacer les valeurs absolues par des modules :

Théorème 8.36

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I . S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout point x intérieur à I , on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

En particulier, on a encore le résultat suivant :

Théorème 8.37

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I . Alors :
 f est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de l'intervalle I .