Chapitre 6

(suite) Équations différentielles

Plan du chapitre

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: dans chaque résultat, on peut ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ ou bien remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1 Généralités sur les ED

1.1 Vocabulaire des ED

Une équation différentielle (ou ED) est une équation entre fonctions qui fait intervenir une fonction inconnue (en général notée y) ainsi qu'au moins une de ses dérivées. Toutes les équations suivantes sont des ED :

$$\begin{aligned} E_1 :&\quad y' - y = 0 \\ E_2 :&\quad y'' + y = \tan x \\ E_3 :&\quad y' y^{(3)} + x y^2 = e^x \end{aligned}$$

Par contre $ay^2 + by + c = 0$ n'est pas une ED, car elle ne fait pas intervenir de dérivées sur y. C'est simplement une équation sur y, et on comprend ici que y est un élément de $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} E_1 :\quad & y' - y = 0 \\ E_2 :\quad & y'' + y = \tan x \\ E_3 :\quad & y'y^{(3)} + xy^2 = e^x \end{aligned}$$

Remarque (Qui est la fonction, qui est la variable)**.** Pour E_2 et E_3, le x n'est pas une fonction, mais la variable de la fonction y. Par exemple, pour E_2, on cherche une fonction $y : x \mapsto y(x)$ qui soit dérivable et telle que pour tout x,

$$y''(x) + y(x) = \tan x$$

Souvent, on omet de préciser qui est la fonction inconnue (ici y) et qui est la variable (ici x pour E_2, E_3). En pratique, il y a rarement ambiguité. Par exemple pour $x' + tx = 0$, on comprend que x est la fonction inconnue et t est sa variable.

Remarque (Abus de notation)**.** Bien que $\tan x, x, e^x$ soient des nombres, E_2 et E_3 représentent une égalité entre fonctions : il y a en fait un abus de notation. On sous-entend que $\tan x$, x, e^x sont en fait les fonctions $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x$ respectivement.

L'ordre d'une ED est l'indice de dérivation le plus élevé qui apparait dans l'équation. Par exemple, E_1, E_2, E_3 sont d'ordre $1, 2, 3$ respectivement.

L'intervalle de définition (ou d'étude) d'une ED est un intervalle I, le plus large possible, sur lequel toutes les fonctions de l'équation sont bien définies. Pour E_1 et E_3, on a $I = \mathbb{R}$. Pour E_2, plusieurs choix sont possibles : par exemple $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Il arrive qu'on impose des conditions initiales sur y : par exemple $y(0) = y_0 \in \mathbb{K}$ et/ou $y'(0) = y_1 \in \mathbb{K}$. On doit alors trouver une fonction qui vérifie l'équation ainsi que les conditions initiales.

Résoudre une ED, c'est trouver *toutes* les solutions $y : I \to \mathbb{K}$ qui vérifient l'équation et les éventuelles conditions initiales.

1.2 ED linéaires

Définition 6.1 (ED linéaire)

Une ED est dite linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre de l'ED, et $a_0, a_1, \ldots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions connues.
Les fonctions $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelées coefficients de l'ED.
La fonction b est appelée second membre de l'ED.

Exemple 1. E_1 et E_2 sont linéaires, mais pas E_3.

Exemple 2. Compléter le tableau suivant :

		Ordre	Intervalle I	Linéaire ?
E_4	$5y^{(5)} + 3y^{(3)} = 0$			
E_5	$y' + y^2 = t$			
E_6	$yy'' = \frac{1}{t}$			

		Ordre	Intervalle I	Linéaire ?
E_7	$y' + y = 1 + ye^x$			
E_8	$\frac{1}{i\theta}y^{(4)} + e^{i\theta}y' = 0$			
E_9	$\frac{1}{y'} = \frac{1}{y}$			

Définition 6.2 (ED linéaire homogène)

On considère une ED linéaire :

$$E: \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

On lui associe une <u>équation homogène</u> (ou <u>sans second membre</u>) en remplaçant $b(t)$ par 0 :

$$E_H: \quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

On remarquera que E_H est aussi une ED linéaire.

Dans ce chapitre, toutes les ED qu'on étudiera seront linéaires. Cette linéarité permet d'obtenir *toutes* les solutions de E à partir *d'une* solution de E et de *toutes* les solutions de E_H.

1.3 Structure des solutions d'une ED linéaire

On considère une ED linéaire et son équation homogène associée.

$$\begin{aligned} E: &\quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ E_H: &\quad a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \end{aligned}$$

On note :

- $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'ED linéaire E.
- $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène E_H.

On veut résoudre E, c'est-à-dire trouver $\mathcal{S}$.

Théorème 6.3 (Structure de $\mathcal{S}$)

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ une solution (dite particulière) de E. Alors pour toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{S} &\iff y - y_p \in \mathcal{S}_H \\ &\iff y \in \left\{ y_p + y_H \mid y_H \in \mathcal{S}_H \right\} \end{aligned}$$

Démonstration. La seconde équivalence est évidente, c'est une reformulation. Montrons la première équivalence. On fait la démonstration pour $n = 1$, le cas général étant similaire. Comme $y_p \in \mathcal{S}$,

$$
\begin{aligned}
y \in \mathcal{S} &\iff \begin{cases} y_p \in \mathcal{S} \\ y \in \mathcal{S} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)(y' - y_p') + a_0(t)(y - y_p) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)(y - y_p)' + a_0(t)(y - y_p) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_p \in \mathcal{S} \\ y - y_p \in \mathcal{S}_H \end{cases} \\
&\iff y - y_p \in \mathcal{S}_H
\end{aligned}
$$

□

Définition 6.4 (Ensemble $a+B$)

Soient $a \in \mathbb{K}$ et $B \subset \mathbb{K}$. On définit l'ensemble $a+B$ par

$$a + B = \{a + b \in \mathbb{K} \mid b \in B\}$$

On note aussi $B + a = a + B$. Attention, a est un élément de $\mathbb{K}$ mais B et $a+B$ sont des ensembles.

Exemple 3. L'ensemble des nombres impairs positifs

$$2\mathbb{N} + 1 = \{n + 1 \mid n \in 2\mathbb{N}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble des nombres impairs (de signe quelconque) est $2\mathbb{Z} + 1$.

Corollaire 6.5

Soit $y_p \in \mathcal{S}$. Alors

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H \qquad \text{càd} \qquad \mathcal{S} = \{y_p + y_H \mid y_H \in \mathcal{S}_H\}$$

Autrement dit, pour déterminer $\mathcal{S}$, il suffit de trouver *une* solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$ ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_H$ (càd *toutes* les solutions de E_H).

2 ED linéaires du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse aux ED linéaires du premier ordre : $a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$. Pour le moment, on suppose qu'on peut mettre cette équation sous la forme

$$E : \quad y' + a(t)y = b(t)$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions données.

Hypothèse

On suppose que $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions *continues* (donc en particulier on peut calculer leur intégrale).

2.1 Cas avec a, b constants

On suppose dans cette sous-partie que les fonctions a et b sont constantes : $a(t) \equiv a_0 \in \mathbb{K}$ et $b(t) \equiv b_0 \in \mathbb{K}$.

$$E : \quad y' + a_0 y = b_0$$

Dans ce cas, l'intervalle de définition est $I = \mathbb{R}$. Pour résoudre E, il faut trouver $\mathcal{S}$. D'après le corollaire 6.5, il suffit de trouver une solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$ et de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_H$, qui est l'ensemble de solutions de :

$$E_H : \quad y' + a_0 y = 0$$

Étape 1 : solution générale de E_H – trouver $\mathcal{S}_H$.

Nous prouverons dans le cas général (a non constante) que $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si y_H est de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-a_0 t} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

Ainsi, $\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto Ce^{-a_0 t} \mid C \in \mathbb{K} \right\}$.

Étape 2 : solution particulière de E – trouver y_p.

Maintenant, on cherche *une* solution particulière de $y' + a_0 y = b_0$. On remarque que la fonction

$$y_p(t) := \begin{cases} b_0 t & \text{si } a_0 = 0 \\ \dfrac{b_0}{a_0} & \text{si } a_0 \neq 0 \end{cases}$$

est bien une solution particulière de E.

Étape 3 : solution générale de E – trouver $\mathcal{S}$.

Par le corollaire 6.5, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(t) = y_p(t) + Ce^{-a_0 t} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

On a ainsi trouvé $\mathcal{S}$ et résolu l'équation.

Remarque. Chaque valeur de C donne une solution différente : il y a donc une infinité de solutions. C'est le cas pour toute ED linéaire.

Exemple 4. Résoudre $y' + 2y = -3$.

L'intervalle de définition est $I = \mathbb{R}$.
On résout l'équation homogène $y' + 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-2t} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs $y' + 2y = -3$ a pour solution particulière évidente $y_p : t \mapsto \dfrac{-3}{2}$.
Ainsi, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(t) = -\frac{3}{2} + Ce^{-2t} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}$$

2.2 Cas avec a, b quelconques

On étudie le cas général

$$E: \quad y' + a(t)y = b(t)$$

où $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions (continues). L'équation homogène associée est

$$E_H: \quad y' + a(t)y = 0$$

Étape 1 : solution générale de E_H.

Proposition 6.6

Toutes les solutions de $y' + a(t)y = 0$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

et où $A : I \to \mathbb{K}$ est une primitive (quelconque) de a.

Démonstration. Soit $C \in \mathbb{K}$. On vérifie d'abord que y_H est solution. y_H est clairement définie et dérivable sur I. De plus pour tout $t \in I$,

$$y_H'(t) = -aCe^{-A(t)} = -ay_H(t)$$

donc y_H est bien solution de $y' + ay = 0$.
Réciproquement, soit $y : I \to \mathbb{K}$ une solution quelconque de $y' + ay = 0$. Montrons que y est de la forme y_H. On pose, pour tout $t \in I$,

$$z(t) := y(t)e^{A(t)}$$

La fonction z est dérivable par produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} z'(t) &= y'(t)e^{A(t)} + ay(t)e^{A(t)} \\ &= \left(y'(t) + ay(t)\right)e^{A(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, comme z' s'annule sur l'intervalle I, on en déduit que z est constante sur I. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que $z(t) = C$. Alors,

$$y(t) = z(t)e^{-A(t)} = Ce^{-A(t)}$$

et donc y est de la forme voulue. □

On remarquera que si $a(t) \equiv a_0$ est constante, alors on peut prendre comme primitive $A(t) = a_0 t$, ce qui permet de retrouver le cas vu en section 2.1.

Étape 2 : solution particulière de E.

Deux méthodes sont possibles : ou bien on trouve une solution "évidente", ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante.

Méthode (Variation de la constante)

On cherche une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$. On part de la solution générale de l'équation homogène E_H, à savoir

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)}$$

avec $C \in \mathbb{K}$. Ensuite, on pose une fonction y_p de la même forme que y_H mais où C est remplacée par une fonction (inconnue) $C(t)$:

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

Pour trouver $C(t)$, on injecte cette forme de y_p dans l'équation :

$$\begin{aligned} y_p' + a(t)y_p = b(t) &\iff C'(t)e^{-A(t)} - a(t)C(t)e^{-A(t)} + a(t)C(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff C'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\iff C'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

La fonction C est ainsi une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I. Pour en trouver une, on fixe $t_0 \in I$ comme on le souhaite et on pose :

$$\boxed{C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds}$$

Ainsi,

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds$$

Remarque. La fonction $C(t)$ choisie est l'unique primitive de be^A qui s'annule en t_0. Chaque valeur de t_0 conduit à une solution particulière y_p différente. Comme on a juste besoin d'une seule solution particulière, on prend le t_0 le plus simple possible (par exemple $t_0 = 0$ si $0 \in I$).

Étape 3 : solution générale de E.

Par le corollaire 6.5, y est solution de E si et seulement si

$$y(t) = y_p(t) + Ce^{-A(t)}$$

avec $C \in \mathbb{K}$. Attention à ne pas confondre $C(t)$, à savoir la fonction déterminée par la variation de la constante, et la constante C dans $Ce^{-A(t)}$, qui est une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Exemple 5. Résoudre $y' + xy = 4x$.

L'intervalle de définition est $I = \mathbb{R}$.
On résout l'équation homogène $y' + xy = 0$. Les solutions sont les fonctions de la forme

$$y_H(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs $y' + xy = 4x$ a pour solution particulière évidente $y_p : x \mapsto 4$.
Ainsi, $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(x) = 4 + Ce^{-2t} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}$$

Exemple 6. Résoudre $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

L'intervalle de définition est $I=\mathbb{R}$.
De même que précédemment, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y_H(x)=Ce^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{avec} \quad C\in\mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière par la variation de la constante. On pose

$$y_p : x \mapsto C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Alors y_p est solution si et seulement si

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}-xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}}+xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ou encore $C'(x)=1$. Ainsi, on peut prendre $C(x)=x$, donc $y_p(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ convient.
Ainsi, $y\in\mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}+Ce^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{avec} \quad C\in\mathbb{R}$$

2.3 Conditions initiales

Définition 6.7 (Problème de Cauchy (ordre 1))

Soient $a,b : I\to\mathbb{K}$ continues et $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \quad \begin{cases} y'+a(t)y=b(t) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 1)

Théorème 6.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 1))

Pour chaque couple $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y: I\to\mathbb{K}$.

Un problème de Cauchy correspond à un phénomène d'évolution d'une “grandeur” $y(t)$ en fonction du temps t. Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que :

- Si on connait la valeur y_0 de $y(t)$ en un temps t_0 (càd on sait que $y(t_0)=y_0$)
- Si on connait la loi d'évolution de $y(t)$, ici $y'+a(t)y=b(t)$

Alors cela suffit pour déterminer $y(t)$ de manière unique pour tous les temps t.

Pour trouver cette unique solution, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend d'une constante $C\in\mathbb{K}$). Puis on regarde quelle (unique) valeur de C permet de vérifier la condition initiale.

Exemple 7. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'+xy=e^{-x^2} \\ y(1)=0 \end{cases}$ On a vu que $y\in\mathcal{S}$ si et seulement si y est de la forme

$$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}+Ce^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \text{avec} \quad C\in\mathbb{R}$$

Il faut donc trouver C de sorte que $y(1)=0$. Or,

$$\begin{aligned} y(1)=0 &\iff e^{-\frac{1}{2}}+Ce^{-\frac{1}{2}}=0 \\ &\iff C=-1 \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution qui satisfait le problème est

$$y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}=(x-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3 ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéresse aux ED linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$E: \quad ay''+by'+cy=d(t)$$

L'équation homogène associée est

$$E_H: \quad ay''+by'+cy=0$$

Hypothèse

On suppose $a,b,c\in\mathbb{K}$ avec $a\neq 0$. De plus, $d: I\to\mathbb{K}$ est une fonction *continue* donnée.

3.1 Résolution de E

Étape 1 : solution générale de E_H

Proposition 6.9 (Résolution de E_H, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(C): \quad aX^2+bX+c=0$$

dont le discriminant est $\Delta=b^2-4ac\in\mathbb{C}$.

- Si $\Delta\neq 0$, on note r_1,r_2 les deux racines (complexes) de (C). Alors $y_H\in\mathcal{S}_H$ si et seulement s'il existe $A,B\in\mathbb{C}$ tels que
$$\boxed{y_H(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}}$$
- Si $\Delta=0$, on note $r=-\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine (complexe) de (C). Alors $y_H\in\mathcal{S}_H$ si et seulement s'il existe $A,B\in\mathbb{C}$ tels que
$$\boxed{y_H(t)=(A+Bt)e^{rt}}$$

Proposition 6.10 (Résolution de E_H, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(C): \quad aX^2+bX+c=0$$

dont le discriminant est $\Delta=b^2-4ac\in\mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, on note $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les deux racines réelles de (C). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\boxed{y_H(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$
- Si $\Delta = 0$, on note $r = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique racine réelle de (C). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\boxed{y_H(t) = (A + Bt)e^{rt}}$$
- Si $\Delta < 0$, on note $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (C) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement s'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\boxed{y_H(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)}$$

On notera que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toutes les solutions y_H sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (notez que les variables $A, B, r_1, r_2, r, \alpha, \beta$ sont toutes réelles).

Exemple 8. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$ L'équation caractéristique est
$$X^2 - 4X + 3 = 0$$
de discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ donc deux racines réelles :
$$r_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \qquad r_2 = \frac{4-2}{2} = 1$$
et les solutions sont donc les fonctions
$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 9. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ L'équation caractéristique est
$$X^2 + 4X + 4 = 0$$
de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$ donc une racine double : $r = -2$.
Les solutions sont donc les fonctions
$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 10. Résoudre $y'' + iy' + 2y = 0$ L'équation caractéristique est
$$X^2 + iX + 2 = 0$$
de discriminant $\Delta = -1 - 8 = -9 \neq 0$ donc deux racines complexes. De plus, les racines carrées de Δ sont $3i$ et $-3i$. Ainsi,
$$r_1 = \frac{-i + 3i}{2} = i \qquad r_2 = \frac{-i - 3i}{2} = -2i$$

Les solutions sont donc les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{ix} + Be^{-2ix} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C}$$

Exemple 11. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$ L'équation caractéristique est

$$X^2 + 2X + 5 = 0$$

de discriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ donc deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-2 + i\sqrt{16}}{2} = -1 + 2i \qquad r_2 = \overline{r_1} = -1 - 2i$$

Les solutions sont donc les fonctions

$$y_H(x) = e^{-x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right) \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Étape 2 : solution particulière y_p

On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

Au programme de MPSI, on ne traite que certains cas particuliers de fonctions d.

Méthode (Forme de y_p avec d exponentiel)

Soit $q \in \mathbb{K}$. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = e^{qt}$$

- Si q n'est pas racine de $P(X) := aX^2 + bX + c$, alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ce^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est racine simple de P, alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Cte^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est racine double de P, alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ct^2e^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.

Méthode (Forme de y_p avec d polynômial)

Soit Q un polynôme. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = Q(t)$$

On cherche y_p sous la forme $y_p(t) = R(t)$ où R est un polynôme à déterminer :

- Si $c \neq 0$, alors $\deg R = \deg Q$.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors $\deg R = \deg Q + 1$.
- Si $c = b = 0$, alors $ay'' = Q(t)$ et on obtient R en intégrant deux fois $\dfrac{1}{a}Q$ (et on aura $\deg R = \deg Q + 2$).

Étape 3 : solution générale de E

Comme pour l'ordre 1, une fois qu'on a déterminé une solution générale y_H de E_H (avec des constantes $A, B \in \mathbb{K}$) et une solution particulière y_p de E, alors $y_p + y_H$ est la solution générale de E.

Exemple 12. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = x^2$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(Comme $4 \neq 0$, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de même degré que $Q(x) = x^2$). On pose $y_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation, on trouve :

$$2a_2 + 4(2a_2 x + a_1) + 4\left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = x^2$$

càd

$$4a_2 x^2 + (4a_1 + 8a_2)x + 2a_2 + 4a_1 + 4a_0 = x^2$$

En égalisant les termes de même degré :

$$\begin{cases} 4a_2 = 1 \\ 4a_1 + 8a_2 = 0 \\ 2a_2 + 4a_1 + 4a_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{4} \\ a_1 = -2a_2 \\ a_0 = \dfrac{1}{4}(-2a_2 - 4a_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{4} \\ a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_0 = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} + 2\right) = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Ainsi,

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}$$

et donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} + (A + Bx)e^{-2x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 13. Résoudre $y'' + 4y' = 1$.
On peut montrer que les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = A + Be^{-4x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(On cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré $0 + 1 = 1$). Cherchons une solution particulière de forme $y_p(x) = a_1 x + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation, on trouve :

$$4a_1 = 1$$

Ainsi, on peut prendre $a_1 = \dfrac{1}{4}$ et (par exemple) $a_0 = 0$. Alors

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x$$

Donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{4}x + A + Be^{-4x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 14. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(-1 n'est pas racine de $X^2 - 4X + 3$). Cherchons une solution particulière de forme $y_p(x) = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. En injectant dans l'équation, on trouve

$$Ce^{-x} + 4Ce^{-x} + 3Ce^{-x} = e^{-x}$$

donc $8C = 1$, si bien que $C = \frac{1}{8}$. Ainsi, $y_p(x) = \frac{1}{8}e^{-x}$. Donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{-x} + Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 15. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{x}$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(1 est racine simple de $X^2 - 4X + 3$). Cherchons une solution particulière de forme $y_p(x) = Cxe^{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_p'(x) = Ce^{x} + Cxe^{x} = C(1+x)e^{-x}$$

$$y_p''(x) = Ce^{x} + C(1+x)e^{x} = C\,(2+x)\,e^{-x}$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$C\,(2+x)\,e^{-x} - 4C(1+x)e^{-x} + 3Cxe^{-x} = e^{-x}$$

càd

$$2C - 4C + 3C = 1$$

donc $C = 1$. Ainsi, $y_p(x) = xe^{-x}$. Donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = xe^{-x} + Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

3.2 D'autres cas de fonctions d

Proposition 6.11 (Principe de superposition)

Soient $d_1, d_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. On suppose que

$$\begin{array}{ll} y_1 : I \to \mathbb{K} \text{ est une solution de} & ay'' + by' + cy = d_1(t) \\ y_2 : I \to \mathbb{K} \text{ est une solution de} & ay'' + by' + cy = d_2(t) \end{array}$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \text{ est une solution de} \qquad ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

Démonstration. On sait que

$$\begin{aligned} ay_1'' + by_1' + cy_1 &= d_1(t) \\ ay_2'' + by_2' + cy_2 &= d_2(t) \end{aligned}$$

On multiplie la première ligne par λ, la seconde par μ, et on les additionne. On obtient alors

$$a(\lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

d'où

$$a(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + b(\lambda y_1 + \mu y_2)' + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

et donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$. □

Le principe de superposition se généralise à des ED linéaires de tout ordre, mais pour cette année, il est suffisant de le voir pour l'ordre 2. Grâce au principe de superposition, on peut traiter des cas de fonctions d un peu plus variés.

Exemple 16. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \operatorname{sh} x$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, on a vu que

$$\begin{gathered} x \mapsto \frac{1}{8}e^{-x} \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^{-x} \\ x \mapsto xe^x \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^x \end{gathered}$$

Comme $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, on en déduit que

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\left(xe^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right)$$

est solution particulière. Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(xe^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right) + Ae^{3x} + Be^x \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Méthode (Non officiel – Forme de y_p avec d trigonométrique)

Si $d(x) = \cos(\alpha x)$ ou $d(x) = \sin(\alpha x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda \cos(\alpha x) + \mu \sin(\alpha x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ à déterminer.

Dans de très rares cas, cette méthode peut échouer. Il faut alors utiliser le fait que $\cos(\alpha x) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}\right)$ et utiliser le principe de superposition.

Exemple 17. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \cos x$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Cherchons une solution particulière de forme $y_p(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_p'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x$$
$$y_p''(x) = -\lambda \cos x - \mu \sin x$$

En injectant dans l'équation, on obtient

$$-\lambda \cos x - \mu \sin x - 4(-\lambda \sin x + \mu \cos x) + 3(\lambda \cos x + \mu \sin x) = \cos x$$

càd

$$(-\lambda - 4\mu + 3\lambda)\cos x + (-\mu - 4\lambda + 3\mu)\sin x = \cos x$$

Cela entraine que

$$\begin{cases} 2\lambda - 4\mu = 1 \\ 2\mu - 4\lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = 2\lambda \\ -6\lambda = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{6} \\ \mu = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $y_p(x) = -\frac{1}{6}\cos x - \frac{1}{3}\sin x$. Donc les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{1}{6}\cos x - \frac{1}{3}\sin x + Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

3.3 Conditions initiales

Définition 6.12 (Problème de Cauchy (ordre 2))

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d : I \to \mathbb{K}$ continue et $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \quad \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants).

Théorème 6.13 (Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 2))

Pour chaque triplet $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

Comme pour l'ordre 1, pour résoudre un problème de Cauchy, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$). Puis on regarde quelle (unique) valeur du couple (A, B) permet de vérifier les conditions initiales. Comme il y a deux constantes, il faut une condition sur $y(t_0)$ et une sur $y'(t_0)$

Exemple 18. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

On a vu que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(xe^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right) + Ae^{3x} + Be^x \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Vérifions les conditions initiales :

$$y(0) = -\frac{1}{16} + A + B$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + xe^x + \frac{1}{8}e^{-x}\right) + 3Ae^{3x} + Be^x$$

$$y'(0) = \frac{9}{16} + 3A + B$$

Ainsi, on doit résoudre

$$\begin{cases} A + B - \frac{1}{16} = 0 \\ 3A + B + \frac{9}{16} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2A + \frac{10}{16} = 0 \\ A + B - \frac{1}{16} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{5}{16} \\ B = \frac{1}{16} - A = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(xe^x - \frac{1}{8}e^{-x}\right) - \frac{5}{16}e^{3x} + \frac{3}{8}e^x$$

4 Compléments

4.1 Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

On considère l'ED linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.

Proposition 6.14

Soient y_1, y_2 deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$ sur I.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{K}$ la valeur telle que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = z$. Alors y_1, y_2 sont solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

Or, la solution de ce problème est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, $y_1 = y_2$. □

4.2 Les “astuces” des physiciens... (HORS PROGRAMME)

Pour résoudre des ED, nos amis les physiciens emploient parfois des méthodes “aventureuses” pour un matheux... La méthode qu’on décrit ci-dessous n’est pas rigoureuse, et on ne doit PAS l’écrire sur une copie de maths.
Néanmoins, elle conduit au bon résultat : on donne ci-dessous, à chaque étape, l’équivalent mathématique.

On considère l’équation définie sur $I = \mathbb{R}$,

$$y' = -a(t)y$$

Les physiciens cherchent en général les solutions y qui sont strictement positives, càd telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) > 0$.

Version physicienne	Version mathématique	
$\dfrac{dy}{dt} = -a(t)y$	$y' = -a(t)y$	
$\dfrac{dy}{y} = -a(t)dt$	$\dfrac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$	$y(t) \neq 0$ pour tout t donc on peut diviser par $y(t)$
$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)dt$	$\displaystyle\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)}ds = -\int_0^t a(s)ds$	On intègre entre 0 et t des fonctions continues
	$[\ln\lvert y(s)\rvert]_0^t = -[A(s)]_0^t$	
	$\ln y(t) - \ln y(0) = -A(t) + A(0)$	$\lvert y(t)\rvert = y(t) \qquad \lvert y(0)\rvert = y(0)$
$\ln y = -A(t) + K$	$\ln y(t) = -A(t) + K$	avec $K := \ln\lvert y(0)\rvert + A(0)$
$y(t) = e^K e^{-A(t)}$		
$y(t) = Ce^{-A(t)}$		avec $C := e^K > 0$

On trouve ainsi toutes les solutions strictement positives de $y' + a(t)y = 0$